極小マルチンゲール測度の存在可能性とデリバティブ投資戦略

足　立　光　生

はじめに　―Black=Scholes モデルの誕生―

金融工学の最も基礎モデルである Black=Scholes モデル[1)]は1973年に登場した。ランダムな揺らぎを記述する確率微分方程式をファイナンスに直接採用する方法は、より幅広い dynamics を扱う理論展開を可能にした。彼らの業績において特筆すべき点は、２次的な派生商品の価格変動を表現するために伊藤の補題を適切に活用している点である。その意味において、F. Black と M. Scholes に（Taylor 級数近似ではなく）伊藤の補題の使用を示唆した R. C. Merton の貢献は大きい。F. Black と M. Scholes は先行の研究者（Bachelier, Sprenkle, Samuelson）と同様に閉じた式を提示したが、先人の業績と明らかに異なる点は、モデルの内部空間のみを使って一意解を導出できた点である。F. Black と M. Scholes の方法では（現代金融工学もしくは現代数理ファイナンスの潮流から翻って検証した場合粗野な方法であるが）、Black=Scholes 偏微分方程式を導出した後、それを熱伝導方程式[2)]の問題として転換できる。それを実質可能にしているのが、Black and Scholes [1973] の仮定 b[3)]（pp. 640）である。

これによって、（本稿が示唆するように、彼らのアプローチが正しいか間違っているかはともかくとして）人類はリスクを計算し、それを市場で売買する技術を獲得した訳である。おりしも彼らのモデルが公表された1973年にシカゴオプション取引所（CBOE）が開設された。重要なのは、テキサス・インストゥルメント社製の卓上計算機で場立ちトレーダーがオプションプライシングを実践した点である。当時の先端技術を誰でも扱えた点は注目すべきであろう。また1970年代に変動為替相場制の移行に伴いリスク管理が注目され、多くの企業がデリバティブに着目するようになると Black=Scholes モデルを基底として数多くのモデルが出現した。

１．問題提起――Black=Scholes モデルの理論 kernel は最小の kernel か ？

Black=Scholes モデルの登場以降、その意義について幾重にも検証が行われた。同時に幾重もその robustness が証明されてきた。特に重要なのは、Harrison and Kreps [1979], Harrison and Pliska [1981] 等が引用した同値マルチンゲール測度（equivalent martingale measure）および同値マルチンゲール測度下での計算方法であり、具体的には

1） $C(t) = S(t)\phi(dt) - K\exp\{-r(T-t)\}\phi\{dt - \sigma(T-t)^{0.5}\}$

$P(t) = K\exp\{-r(T-t)\}\phi\{-dt + \sigma(T-t)^{0.5}\} - S(t)\phi(-dt)$

ただし、$dt = \{\ln S(t)/K + (r + 0.5\sigma^2)(T-t)\}/\sigma(T-t)^{0.5}$

$C(t)$ ＝コールオプションプレミアム、$P(t)$＝プットオプションプレミアム、$S(t)$ ＝原証券価格 K＝行使価格 r＝安全資産利子率 σ＝ボラティリティ T＝権利行使日、$\phi(\cdot)$＝標準正規分布関数

2） 熱伝導方程式とは、均質な物質から構成される棒の熱伝導を記述する方程式であり、基本的に「有限な長さの棒の熱伝導」「無限に長い棒の熱伝導」「両端の温度を固定した棒における熱伝導」の３種類を対象とする。いずれも時刻 t における座標 x の点の温度 u を、位置 x と時刻 t の２変数関数 $u = u(x,t)$ で表す。Black-Scholes 偏微分方程式は「無限に長い棒の熱伝導」である。

3） The stock price follows a random walk in continuous time with a variance rate proportional to the square of the stock price.Thus the distribution of possile stock prices at the end of any finite interval is log-normal. The variance rate of the return on the stock is constant. (Black and Scholes [1973], pp. 640)

Girsanov 定理による Girsanov 変換である[4)]。Girsanov 変換は所与の伊藤過程を、ほとんど任意に与えられたドリフトを持つ伊藤過程に書き直し、同時に確率測度を調整する[5)]。

またこの意義は、原資産と呼ばれる資産価格から、副次的なデリバティブの価値を求めるものであり、projection technique そのものである。しかし、写影を司る kernel が実は、不純物を含んでいたり、もしくは最小に見えて最小でなかったりした場合、金融市場に与える影響は極めて大きい。まずそのことに厳重に注意する必要がある。

同値マルチンゲール測度の存在は、裁定ポートフォリオの存在を同時に否定するものであるため、派生商品のプライシングフォーミュラを簡単に構築することができる。しかしその一方で、実際の金融市場に目をむければこの確率測度が一意に存在するということ自体が妥当かという疑問も生じてこよう。Hahn-Banach 定理に立脚する同値マルチンゲール測度は complete market が前提である。incomplete market ではそもそも一意なのだろうか。また、我々が対峙する現実の金融市場が incomplete market であるならば、市場関係者はどんなマルチンゲール測度を使用すべきか。本稿では新たなるマルチンゲール測度の一例として incomplete market へ同値マルチンゲール測度を応用した「極小マルチンゲール測度（Minimal Martingale Measure）」の存在可能性をめぐる興味深い研究を考察する。極小マルチンゲール測度は Föllmer and Schweizer [1991] が提唱したものであり、相対エントロピーを含む機能を最小化する同値マルチンゲール測度と考えればよい。Föllmer and Schweizer の考察は、資産価格のジャンプ等に対峙する現場にとって非常に有用と考えられる。

以下では、時間 t は連続的に変化し、確率空間は、抽象空間 Ω の部分集合からなる σ–加法族 $\mathcal{F}$ 上で確率測度 P を定義した 3 つ組（Ω, $\mathcal{F}$, P）とする。

2．準備（同値マルチンゲール測度と Girsanov 変換に関するノート）

本節では議論の出発点として数理ファイナンスの伝統的な道具である同値マルチンゲール測度、Girsanov 変換に関して、以降の議論を把握するための最小限の知識を復習する[6)]。

定義2.1（d 次元確率過程）

$\mathbb{R}^d$–値確率変数の族 $X=(X_t)_{t\geq 0}$、あるいは $X=(X_t(\omega))_{t\geq 0}$ を d 次元確率過程という[7)]。
すなわち d 次元確率過程は $X_t=(X_t^i)_{1\leq i\leq d}=(X_t^i,\ \cdots,\ X_t^d),\ t\geq 0$ である。
$X_t(\omega),\ \forall\omega\in\Omega$ が t の関数として連続であるとき d 次元確率過程は連続である。 □

定義2.2（$\mathcal{F}_t$-適合）

$\mathcal{F}_t$ は σ–加法族で $\mathcal{F}_t\subset\mathcal{F}$ かつ $0\leq s\leq t$ のとき $\mathcal{F}_s\subset\mathcal{F}_t$ を満たす増大情報系とする。
d 次元確率過程 $X=(X_t)_{t\geq 0}$ が $\mathcal{F}_t$–適合であるとは、$\forall\, t\geq 0$ に対し $X_t:\Omega\to\mathbb{R}^d$ が $\mathcal{F}_t$–可測のときにいう。 □

定義2.3（ブラウン運動）

確率過程 $B=(B_t)_{t\geq 0}=(B_t(\omega))_{t\geq 0}$ は以下の条件を満たすときブラウン運動である。

4） 本稿では以下 Black=Scholes モデルならびにその応用モデルの理論 Kernel を、同値マルチンゲール測度に関連付ける。

5） Basically the Girsanov theorem says that if we change the drift coefficient of a given Ito processes (with a nondegenerate diffusion coefficient), then the law of the process will not change dramatically. (Øksendal [1998], 8. Other Topics in Diffusion Theory, pp. 152)

6） より詳細はたとえば舟木［1997］、Øksendal［1998］等の一般的な教科書を参照せよ。

7） ω は Ω の見本 (sample) である。

Ⅰ）$P(B_0=0)=1$, a.s.,

Ⅱ）$\forall\omega\in\Omega$ で $B_t(\omega)$ は t について連続、

Ⅲ）$\forall A_1, \cdots, A_n\in$ B（$\mathbb{R}$）[8] に対して

$$P(B_{ti}-B_{ti-1}\in A_i, 1\le i\le n)=\prod_{i=1}^{n}p(t_i-t_{i-1},x_i)\int_{A1}dx_1\int_{A2}dx_2\cdots\int_{An}dx_n,$$

$$\text{ただし}\quad P(t,x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\exp\left(-\frac{x^2}{2t}\right), t>0, x\in\mathbb{R}. \qquad \square \quad (2.1)$$

定義2.4（d次元ブラウン運動）

$(\Omega^i, \mathcal{F}^i, P^i)$　$1\le i\le d$ で直積測度、すなわち

$$\Omega=\prod_{i=1}^{d}\Omega^i,\ \mathcal{F}=\prod_{i=1}^{d}\mathcal{F}^i, P=\prod_{i=1}^{d}P^i \tag{2.2}$$

を考え、この上で

$$B_t=(B_t^i)_{1\le i\le d}=(B_t^1,\cdots,B_t^d), t\ge 0 \quad \text{ただし}B_t^i\text{：ブラウン運動}$$

$$\{B_t^i\}\text{が互いに独立}$$

を満たすときのブラウン運動は d 次元ブラウン運動である。　□

定義2.5（伊藤過程）

定義2.3のブラウン運動を使用する。伊藤過程は、

$$X_t=X_0+\int_0^t u(s,\omega)ds+\int_0^t v(s,\omega)dB_s \tag{2.3}$$

$$P\left[\int_0^t |u(s,\omega)|\,ds<\infty, \forall t\ge 0\right]=1, \tag{2.4}$$

$$P\left[\int_0^t v(s,\omega)^2 ds<\infty,\ \forall t\ge 0\right]=1 \tag{2.5}$$

を満足する過程である。また形式的に微分して

$$dX_t=u\,dt+v\,dB_t \tag{2.6}$$

と表すこともできる。　□

定義2.6（d次元の伊藤過程）

$$X_t^i=X_0^i+\int_0^t u^i(s,\omega)ds+\sum_{k=1}^{m}\int_0^t v_k^i(s,\omega)\,dB_s, \qquad (1\le i\le d) \tag{2.7}$$

を d次元の伊藤過程と呼ぶ。また微分形で表現すれば次の形で表される。

$$dX_t=u\,dt+v\,dB_t,\ dX_t=u(t,\omega)dt+v(t,\omega)dB_t, \quad \text{ただし}$$

8）B：ボレル集合族：一般の位相空間 Я に対して、Я のすべての開集合を含む最小の σ–加法族をボレル集合族といい B(Я) とする。

$$X_t = \begin{pmatrix} X_t^1 \\ \vdots \\ X_t^d \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} u^1 \\ \vdots \\ u^d \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} v^{11} & \cdots & v^{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ v^{d1} & \cdots & v^{dm} \end{pmatrix}, \quad dB_t = \begin{pmatrix} dB_t^1 \\ \vdots \\ dB_t^m \end{pmatrix}. \tag{2.8}$$

定義2.7（Market Model，MM）

$\mathcal{F}_t$–適合な $d+1$ 次元確率過程

$$X_t = (X_t^i)_{0 \le i \le d} = (X_t^0, \cdots, X_t^d), t \ge 0 \tag{2.9}$$

が多次元の伊藤過程の性質を満たす場合、Market Model (MM) とよぶ。 □

定義2.8（Normalized Market Model，NMM）

$$\overline{X}_t^d \overset{def}{=} \frac{X_t^i}{X_t^0}, \quad 1 \le i \le d \tag{2.10}$$

を Normalized Market Model (NMM) とする。 □

定義2.9（同値マルチンゲール測度）

ｉ）NMM がマルチンゲール、

ii）測度 P と互いに絶対連続（$Q \ll P$）、

を満たす測度 Q が存在するときは Q は同値マルチンゲール測度である（$P \sim Q$）。 □

補題2.10

同値マルチンゲール測度が存在すれば、MM は裁定ポートフォリオをもたない。 □

$dX_t = u(s, \omega)dt + dB_t$, $t \in [0, T]$, $T \le \infty$, $X_0 = 0$, ただし

$$X_t = \begin{pmatrix} X_t^1 \\ \vdots \\ X_t^d \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} u^1 \\ \vdots \\ u^d \end{pmatrix}, \quad dB_t = \begin{pmatrix} dB_t^1 \\ \vdots \\ dB_t^d \end{pmatrix}. \tag{2.11}$$

を考える。ただし u は Novikov's condition を満たすと仮定する。すなわち（Ω, $\mathcal{F} = \mathcal{F}_t$）上の確率測度を P とし、P に関して期待値をとると

$$E^P\left[\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T u^2 ds\right)\right] < \infty \tag{2.12}$$

が満たされると仮定する。

定理2.11 （Girsanov 定理１）

以上の条件の下で、

$$G = G_t \overset{def}{=} \exp\left\{-\int_0^t u(s,\omega)dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t u^2(s,\omega)ds\right\}, t \le T \tag{2.13}$$

となる過程を作る。（Ω, $\mathcal{F} = \mathcal{F}_t$）上の確率測度 P と同値マルチンゲール測度 Q は

$$\frac{dQ(\omega)}{dP(\omega)} = G_T(\omega) \tag{2.14}$$

を満たす。G_T を Q の P に関する Radon-Nykodym 微分係数という。 □

$t \in [0, T], T \leq \infty, X_0 = 0$ において $dX_t = u\,dt + v dB_t$

$$X_t = \begin{pmatrix} X_t^1 \\ \vdots \\ X_t^d \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} u^1 \\ \vdots \\ u^d \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} v^{11} & \cdots & v^{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ v^{d1} & \cdots & v^{dm} \end{pmatrix}, dB_t = \begin{pmatrix} dB_t^1 \\ \vdots \\ dB_t^m \end{pmatrix} \tag{2.15}$$

とする。ただし u は Novikov's Condition を満たすと仮定する。
ここで確率過程 $\xi = \xi(t, \omega)$, $\zeta = \zeta(t, \omega)$ を用意してそれぞれが

$$\xi \in \mathbb{R}_h^m, \zeta \in \mathbb{R}_h^d \tag{2.16}$$

を満たすとする[9)]。
u, v, ξ, ζ すなわち $u(t, \omega)$, $v(t, \omega)$, $\xi(t, \omega)$, $\zeta(t, \omega)$ の間には、

$$v\xi = u - \zeta \tag{2.17}$$

という関係式が成立しているとする。ξ もまた Novikov's condition を満たすと仮定し、

$$E^p\left[\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T \xi^2 ds\right)\right] < \infty \tag{2.18}$$

が成立する。

定理2.12（Girsanov 定理２）

以上の条件の下で、

$$G = G_t \overset{def}{=} \exp\left\{-\int_0^t \xi(s,\omega) dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t \xi^2(s,\omega) ds\right\}, t \leq T \tag{2.19}$$

$$\frac{dQ(\omega)}{dP(\omega)} = G_T(\omega) \tag{2.20}$$

が決定される。このとき

$$B_t^Q \overset{def}{=} B_t + \int_0^t \xi(s,\omega) ds \qquad t \in [0, T] \tag{2.21}$$

で B_t^Q は Q の下でのブラウン運動となる。
またこの場合、(2.19) 式、(2.21) 式より次の確率微分方程式が成立する。

$$dX_t = \zeta(t,\omega) dt + v(t,\omega) dB_t^Q \tag{2.22}$$

また $m = d$ で $\mathbb{R}^{d \times d}$ が可逆ならば

$$\xi = v^{-1}(u - \zeta) \tag{2.23}$$

は一意で与えられる。 □

9） $h = (h_t) = (h_t)_{t \geq 0}$ は σ−加法族で $h_t \subset h$ かつ $0 \leq s \leq t$ のとき $h_s \subset h_t$ を満たす増大情報系とする。

3　Föllmer and Schweizer 定理

Incomplete market では同値マルチンゲール測度はもはや一意ではない。そこでマルチンゲール測度に対して適切な選択が必要である。さらに、原証券をペイオフの状態価格の加重和として扱うことができない incomplete market では、原証券から派生するデリバティブ商品は、(かりに同値マルチンゲール測度の下で計算された場合、) 本質的なリスクを抱えていることになる。

Föllmer and Schweizer が同値マルチンゲール測度（Q）にかわって提唱するのが、**極小マルチンゲール測度** (Minimal Martingale Measure, $\overline{Q}$) である。極小マルチンゲール測度は測度 $Q(\sim P)$ の「相対エントロピーを含むある種の機能」を最小化する同値マルチンゲール測度と考えればよい。この測度が仮に存在すれば、ファイナンスに関する現実世界に非常に有用な結果をもたらす。以下では Doob-Meyer 分解や 2 次変分に関する基本的定義を踏まえた後、Föllmer and Schweizer が定義した極小マルチンゲール測度について考察する。

定理3.1（Doob-Meyer 分解）
確率変数の族 $X=(X_t)_{t\geq 0}$ を考える。X はセミマルチンゲールとする[10] と、

$$X = X_0 + M + A \tag{3.1}$$

M　　: $\mathcal{F}_t$–マルチンゲール、$M=(M_t)_{t\geq 0}$
A　　: $\mathcal{F}_t$–連続過程、$A=(A_t)_{t\geq 0}$

のように分解が一意的に定まる[11]。このような分解を Doob-Meyer 分解という。　□
また 2 乗可積分かつ連続な $\mathcal{F}_t$–マルチンゲール $M=(M_t)_{t\geq 0}$, $M_0=0$ a.s. の全体集合を $\mathcal{M}_T=\mathcal{M}_T(\mathcal{F}_t)$ とする。

定義3.2（２次変分 quadratic variation）
$\forall T>0$ を固定し、時間 t を $[0,\ T]$ に限定する。確率過程 X_t に対して

$$[0,T]\rightarrow\{0=t_1<t_2<\cdots<t_n<t, \Delta t_k=t_{k+1}-t_k\} \tag{3.2}$$

という分割を考えて

$$<X,X>_t=<X>_t=\lim_{\Delta tk\rightarrow 0}\sum_{tk\leq 0}|X_{tk+1}-X_{tk}|^2 \quad \text{(in prob.)} \tag{3.3}$$

で得られる $<X,\ X>_t=<X>_t$ を 2 次変分という。また
$И\in\mathcal{M}_T$, $Й\in\mathcal{M}_T$ として

$$<И,Й>_t=\frac{1}{4}[<И+Й,И+Й>_t-<И-Й,И-Й>_t] \tag{3.4}$$

を $<И,\ Й>$ を $И,\ Й$ の 2 次変分という。　□
過程 A は $<X>$ に関して絶対連続で、例えば過程 $\alpha=(\alpha_t)$, $t\in[0,\ T]$ を使い

$$A_t=\int_0^t \alpha_s\, d<X>_s \quad t\leq T \tag{3.5}$$

と表現できる。

10）同値マルチンゲール測度が存するならば。
11）$E^P[X_0^2+<X>_T+|A|_T]<\infty$
の制約がある。($<X>=<M>$)

定義3.3（極小マルチンゲール測度）

マルチンゲール測度$\overline{Q}$ ($\overline{Q} \sim P$)が次の 2 つの条件を満たすとき、極小マルチンゲール測度とする。

1）F_0 上 $\overline{Q} = P$,

2）測度P 下で$<L,\ M>=0$を満たす$L(\in \mathcal{M}_T^2)$ は$\overline{Q}$ 下でもマルチンゲールである。　□

定理3.4（Föllmer and Schweizer 定理１）

1）極小マルチンゲール測度 $\overline{Q}$ は一意性を持つ。

2）$$\overline{G} = \overline{G}_t \overset{def}{=} \exp\left\{-\int_0^t \alpha_s dM_s - \frac{1}{2}\alpha_s^2 d<X>_s\right\},\ t \in [0, T] \tag{3.6}$$

が測度P 下で二乗可積分マルチンゲールである場合、測度 $\overline{Q}$ は唯一存在する。その場合$\overline{Q}$ は

$$\frac{d\overline{Q}}{dP} = \overline{G}_T \tag{3.7}$$

で与えられる。

3）測度P 下で$L \in \mathcal{M}_T^2$, $<L,\ M>=0$ならば測度$\overline{Q}$ の下では$<L,\ X>=0$である。　□

この定理は測度$\overline{Q}$のマルチンゲール性維持は相対エントロピー（relative entropy）[12]を用いて表現可能であることを示唆する。

定理3.5（Föllmer and Schweizer 定理２）

全てのPと同値マルチンゲール測度Qの族の中で、極小マルチンゲール測度Qは以下の関数で第 2 項の期待値を固定させた場合、相対エントロピーを最小化する。

$$H(Q\,|\,P) - \frac{1}{2}E^Q\left[\int_0^T \alpha_s^2 d<X>_s\right] \tag{3.8}$$ □

［証明］

$$\begin{aligned}
&H(Q\,|\,P) - \frac{1}{2}E^Q\left[\int_0^T \alpha_s^2 d<X>_s\right] \\
&\quad = H(Q\,|\,\overline{Q}) + H(\overline{Q}\,|\,P) - \frac{1}{2}E^Q\left[\int_0^T \alpha_s^2 d<X>_s\right] \\
&\quad = H(Q\,|\,\overline{Q}) + \int \log\frac{d\overline{Q}}{dP} d\overline{Q} - \frac{1}{2}E^Q\left[\int_0^T \alpha_s^2 d<X>_s\right] \\
&\quad = H(Q\,|\,\overline{Q}) + \int \left\{-\int_0^T \alpha_s\, dM_s - \frac{1}{2}\alpha_s^2\, d<X>_s\right\} d\overline{Q} - \frac{1}{2}E^Q\left[\int_0^T \alpha_s^2 d<X>_s\right] \\
&\quad = H(Q\,|\,\overline{Q}) + E^{\overline{Q}}\left[\int_0^T \alpha_s dM_s\right] + \frac{1}{2}E^{\overline{Q}}\left[\int_0^T \alpha_s^2 d<X>_s\right] - \frac{1}{2}E^Q\left[\int_0^T \alpha_s^2 d<X>_s\right] \\
&\quad = 0, iff Q = \overline{Q}.
\end{aligned}$$ ■

Complete market ではオプション価格を、セミマルチンゲールな確率変数の族Xの確率積分として表現可能である。

---

12) 相対エントロピーは非平衡系統計力学に重要な概念である。

相対エントロピー：

$$H(\#\,|\,P) = \left\{\begin{array}{cc} \int \log\frac{d\#}{dp} d\# & (\# \ll p) \\ +\infty & (\text{上記以外}) \end{array}\right\}.$$

相対エントロピーは厳密に正であり、$\# = P$の場合$H(\#\,|\,P) = 0$である。

すなわち complete market（裁定機会がない市場）⇒同値マルチンゲール測度の存在⇒Xはセミマルチンゲール（測度P下）を意味する。このいたってシンプルな命題は Föllmer and Schweizer に確率過程Xを Doob-Meyer 分解させる。そして 2 次変分を使用して極小マルチンゲール測度の存在を示唆した。これは非常に鋭い発見であるといえる[13)]。

おわりに　―基本理論に内在する投資可能性の示唆―

Föllmer and Schweizer [1991] で留意すべき最大のポイントは、大抵の場合において、$\overline{G}$はP下で局所マルチンゲールにすぎないということである。ただしもし$\overline{G}$が二乗可積分マルチンゲールであるならば、このマルチンゲール測度こそ極小である。Föllmer and Schweizer [1991] の考察によれば、Black=Scholes モデルならびにその応用モデルの理論 kernel 自体は頑健性を持つとは考えにくい。現行の金融工学基礎理論の理論に内在する kernel が同値マルチンゲール測度に関連付けられるならば、それは相対エントロピーを最小にするものではなく、これら理論がその中枢にすえる無裁定価格理論はあらかじめ否定されてしまう。

すなわち現実のデリバティブ市場で、現行レジームに基づくデリバティブプライシングが行われた場合には、（極小マルチンゲール測度の観点から）それに付随して常に投資の可能性が存在するということである。この点は極めて重要であり、今後我々がデリバティブ価格理論における投資空間の内在性を考えるうえで重要な根拠であると考えられる。

参考文献

足立光生「同値マルチンゲール測度の不完全情報市場への応用」京都大学経済論集16号（1999年 9 月），pp. 1–12

舟木直久［1997］『確率微分方程式』岩波書店

Ansel, J. and Stricker, C. [1992] “Lois de Martingale Densites,et Decomposition de Föllmer Schweizer,” Annales de l’Institute Henri Poincare-Probabilites et Statistiques 28, 375–392.

Back, K. and Pliska, S. [1991] “On the Fundamental Theorem of Asset Pricing with an Infinite State Space,” Jouranal of Mathematical Economics 20, pp1–18.

Black, F. and Scholes, M. [1973] “The Pricing of Options and Corporate Liabilities, ”Journal of Political Economy, 81, 637–659.

Duffie, D. [1996] “Dynamic Asset Pricing Theory,” Princeton University Press, Princeton NJ.

Øksendal, B. [1998] “Stochastic Differential Equations,” Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.

Föllmer, H. and Schweizer, M. [1991] “Hedging of Contingent Claimas under Incomplete Information,” Applied stochastic analysis / edited by M. H.A. Davis and R.J. Elliott.

Gordon and Breach Science Publishers, c1991.(Stochastics monographs: theory and applications of stochastic processes; v. 5).

13） Schachermayer [1993] は境界条件を持つ確率過程$(X_t)_{t\in[0,1]}$では同値マルチンゲール測度は存在するが、Föllmer and Schweizer が提示した意味での極少マルチンゲール測度は存在しないことを証明している。

定理（Schachermayer定理）フィルター付確率空間$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,1]}, P)$上に連続的なセミマルチンゲール過程$(X_t)_{t\in[0,1]}$が存在して、以下の条件を満たす。

1）$\mathcal{F}_t$-適合なそれぞれのマルチンゲールは連続的である

2）同値マルチンゲール測度が存在する

3）極少マルチンゲール測度$\overline{Q}$は存在しない

4）$\overline{G} = \overline{G}_T$は局所マルチンゲールである。同値マルチンゲール測度Q^{sh}が存在し、

$$N_t = E\left[\frac{dQ^{sh}}{dP}\middle|\mathcal{F}_t\right]$$

を考えた場合$\overline{G}N$がマルチンゲールである。 □

上記定理の証明については Schachermayer [1993] 2 節、 3 節の反例をみよ。

Harrison, M. and Kreps, D. [1979] “Martingales and Arbitrage in Multiperiod Securities Markets,” Journal of Econmic Theory 20, pp. 381–408.

Harrison, M. and Pliska, S. [1981] “Martingales and Stochasic Integrals in the Theory of Continuous Trading,” Stochasic Processes and Their Applications 11, 215–260.

Karatzas, I. and Shreve, S.E. [1991] “Brownian Motion and Stochastic Calculus (2nd Edition)” Springer-Verlag.

Karatzas, I. and Shreve, S.E. [1998] “Methods of Mathematical Finance,” Springer-Verlag.

Schachermayer, W. [1993] “A Counterexample to Several Problems in the Theory of Asset Pricing,” Mathematical finance 3, pp. 217–230.

Schweizer, M. [1992] “Mean-variance hedging for general claims,” Annals of Applied Probability 2, 171–179.