Riemann 多様体の測地球の体積と，Ricci 曲率の積分ノルム

廣　島　　　勉

1　はじめに

n次元 Riemann 多様体(M, g)の距離関数をd，Ricci 曲率を Ric で表す．K を定数とするとき$\mathrm{Ric} \geq (n-1)Kg$ を満たすn次元 Riemann 多様体(M, g)のクラスについて，多様なコンパクト性定理が証明されている．とりわけ，これらの定理は，Ricci 曲率の下限Kによる測地球の体積評価に依っている．

それは，$x \in M$を中心とする半径rの測地球$B_x(r) = \{y \in M | d(x, y) \leq r\}$の体積を定曲率$K$の$n$次元定曲率空間における半径$r$の測地球の体積を$V^K(r)$と比較するものである．

定理1.1（Bishop の比較定理）．$\mathrm{Ric} \geq (n-1)Kg$ であるn次元 Riemann 多様体(M, g)において，$x \in M$，$r > 0$とするならば，$\mathrm{Vol}(B_x(r)) \leq V^K(r)$ が成立する．

近年 Petersen, Wei らによって，条件である Ric 曲率の下からの一様有界性をある種の積分ノルムの条件に置き換える試みが行われて来た（[2], [3]）．

$\lambda(x)$をRicci曲率の$x \in M$における最小固有値とし，$\lambda_K(x) = \max\{\lambda(x), -K\}$と定義する．

定理1.2．n 次元 Riemann 多様体(M, g)において，任意の$x \in M$，$p > n$，$K \geq 0$，$R > 0$に対し，$C = C(n, p, K, R) > 0$が存在して，$r < R$ならば，

$$\mathrm{Vol}(B_x(r)) \leq V^K(r)\left\{1 + C\left(\int_M \lambda_+^{\frac{p}{2}} dv\right)^{\frac{1}{p}}\right\}^p$$

コンパクト性定理の証明には Riemann 多様体のクラスに対し測地球の体積の局所増大性条件，すなわち，クラスに属する任意の Riemann 多様体に対し，$r < t$ ならば$\mathrm{Vol}(B_x(r))/r^n \geq c$が成立するような，Riemann 多様体に依らない定数$c > 0$，$t > 0$が存在する事が必要になる．

Ricci曲率の下からの一様有界性が仮定される場合，比較定理でRを(M, g)の直径$\mathrm{diam}(M)$にとることで，測地球の体積の局所増大性条件が得られる．

定理1.3（Bishop-Gromov の比較定理）．$\mathrm{Ric} \geq (n-1)Kg$である$n$次元 Riemann 多様体$(M, g)$において，$x \in M$，$R > r > 0$とするならば，

$$\frac{\mathrm{Vol}(B_x(r))}{V^K(r)} \geq \frac{\mathrm{Vol}(B_x(R))}{V^K(R)}$$

が成立する．

系1.4．n 次元多様体(M, g)が，$\mathrm{Ric} \geq (n-1)Kg$，$\mathrm{diam}(M) \leq D$，$\mathrm{Vol}(M) \geq v$ をみたすならば，

$$\frac{\mathrm{Vol}(B_x(r))}{V^K(r)} \geq \frac{v}{V^K(D)}$$

が成立する．

本稿では測地球の体積の局所増大性と Ricci 曲率の積分ノルムとの関係について論じる．

2　Bischop 型の比較定理

$\mathbb{R}_+ = \{s \in \mathbb{R} \mid s \geq 0\}$とする. $S_xM = \{u \in T_xM \mid |u| = 1\}$を$x \in M$における接平面の単位球とするとき, 同一視$S^{n-1} \simeq S_xM$のもとで，$(M, g)$ の体積要素dvの極座標 $\mathbb{R}_+ \times S^{n-1} \ni (s, u) \mapsto \exp_x(su) \in M$ での表現を$dv = J\,ds\,d\theta$とする．ここで，$d\theta$ は S^{n-1} の標準的な体積要素とし，$J = J(s, u)$は，最小軌跡の外すなわち$s > c(u)$では0とみなす．

$a = a(s, u) \geq 0$，$J = a^{n-1}$とすると，

$$\frac{a''}{a} \leq -\frac{1}{n-1}\mathrm{Ric}(\partial_s, \partial_s), \tag{2.1}$$

$$a'(0, u) = 1, \tag{2.2}$$

$$a'(0, u) = a''(0, u) = 0 \tag{2.3}$$

が成立することは良く知られている．ここに，a' は s に関する微分である．

M 上の $\lambda_+ : M \to \mathbb{R}$ を，

$$\lambda(x) = -\frac{1}{n-1}\min_{u \in S_xM} \mathrm{Ric}(u, u)$$

$$\lambda_+(x) = \max\{\lambda(x), 0\}$$

で定めれば，(2.1) から，$y = \exp_x(su)$のとき

$$\frac{a''}{a} \leq \lambda_+(y) \tag{2.4}$$

である．

関数 $\varphi = \varphi(s, u)$ を，

$$a' - \frac{a}{s} = \varphi a \tag{2.5}$$

で定める．(2.2)，(2.3) から，

$$\varphi(0, u) = 0 \tag{2.6}$$

である．

(2.5) を s で微分して，

$$a'' - \frac{a'}{s} + \frac{a}{s^2} = \varphi' a + \varphi a',$$

さらに (2.5) を使って，

$$a'' - \frac{\varphi a}{s} = \varphi' a + \frac{\varphi a}{s} + \varphi^2 a,$$

したがって，

$$\varphi' = -2\varphi/s - \varphi^2 + a''/a \tag{2.7}$$

を得る.

ここで関数 φ_+ を $\varphi_+ = \varphi_+(s,\ u) = \max\{\varphi(s,\ u),\ 0\}$ で定め，その微分を

$$\varphi'_+(s,u) = \lim_{\Delta s \downarrow 0} \frac{\varphi_+(s+\Delta s,u) - \varphi_+(s,u)}{\Delta s}$$

と考える.

$p > n$ とする．(2.7) から，

$$\left(\varphi_+^{p-1}\right)' \le -2(p-1)\varphi_+^{p-1}/s - (p-1)\varphi_+^2 + (p-1)\lambda_+\varphi_+^{p-2}$$

と

$$J' = (n-1)(a/s + \varphi a)a^{n-2} \le (n-1)J/s + (n-1)\varphi_+ J \tag{2.8}$$

から，

$$\begin{aligned}\left(\varphi_+^{p-1}J\right)' &= \left(\varphi_+^{p-1}\right)'J + \varphi_+^{p-1}J' \\ &\le -(2p-n-1)\varphi_+^{p-1}J/s - (p-n)\varphi_+^p J + (p-1)\lambda_+\varphi_+^{p-2}J \\ &\le -(p-n)\varphi_+^p J + (p-1)\lambda_+\varphi_+^{p-2}J\end{aligned}$$

を得る．両辺を 0 から $r > 0$ まで積分して，

$$\varphi_+^{p-1}a^{n-1}|_{s=r} + (p-n)\int_0^r \varphi_+^p J\,ds \le (p-1)\int_0^r \lambda_+\varphi_+^{p-2}J\,ds,$$

ここで，$\varphi_+^{p-1}a^{n-1} \ge 0$ なので，

$$\int_0^r \varphi_+^p J\,ds \le \frac{p-1}{p-n}\int_0^r \lambda_+\varphi_+^{p-2}J\,ds \tag{2.9}$$

を得る．$\varepsilon > 0$ として，Young の不等式，

$$\lambda_+\varphi_+^{p-2} \le \frac{2}{p}\varepsilon^{-\frac{p}{2}}\lambda_+^{\frac{p}{2}} + \frac{p-2}{p}\varepsilon^{\frac{p}{p-2}}\varphi_+^p$$

を (2.9) に適用し，$\delta = \dfrac{(p-1)(p-2)}{p(p-n)}\varepsilon^{\frac{p}{p-2}}$ ととれば，

$$(1-\delta)\delta^{\frac{p}{2}-1}\int_0^r \varphi_+^p J\,ds \le \frac{2(p-1)}{p(p-n)}\left(\frac{(p-1)(p-2)}{p(p-n)}\right)^{\frac{p}{2}-1}\int_0^r \lambda_+^{\frac{p}{2}}J\,ds,$$

さらに $\delta = \dfrac{p-2}{p} < 1$ とおいて，

$$\frac{2}{p}\left(\frac{p-2}{p}\right)^{\frac{p}{2}-1}\int_0^r \varphi_+^p J\,ds \le \frac{2(p-1)}{p(p-n)}\left(\frac{(p-1)(p-2)}{p(p-n)}\right)^{\frac{p}{2}-1}\int_0^r \lambda_+^{\frac{p}{2}}J\,ds,$$

したがって，

$$\int_0^r \varphi_+^p J\,ds \le \left(\frac{p-1}{p-n}\right)^{\frac{p}{2}}\int_0^r \lambda_+^{\frac{p}{2}}J\,ds \tag{2.10}$$

を得る．

(2.10) の両辺を S^{n-1} で積分して，

$$\int_{S^{n-1}}\int_0^r \varphi_+^p J\,ds\,d\theta \leq \left(\frac{p-1}{p-n}\right)^{\frac{p}{2}} \int_{B_x(r)} \lambda_+^{\frac{p}{2}}\,dv \tag{2.11}$$

を得る．

(2.8) から，

$$sJ' \leq (n-1)J + (n-1)s\varphi_+ J,$$

これを0からrまで両辺を積分して，

$$rJ|_{s=r} \leq n\int_0^r J\,ds + (n-1)r\int_0^r \varphi_+ J\,ds,$$

さらに，S^{n-1} で積分して，

$$r\int_{S^{n-1}} J|_{s=r}\,ds\,d\theta \leq n\int_{S^{n-1}}\int_0^r J\,ds\,d\theta + (n-1)r\int_{S^{n-1}}\int_0^r \varphi_+ J\,ds\,d\theta$$

である．ここで，$V(r)=\mathrm{Vol}(B_x(r))=\int_{B_x(r)} dv = \int_{S^{n-1}}\int_0^r J\,ds\,d\theta$ とおくと，$V'(r)=\int_{S^{n-1}} J|_{s=r}\,d\theta$であるので，Hölder の不等式と (2.11) から，

$$\begin{aligned} rV'(r) &\leq nV(r)+(n-1)rV(r)^{1-\frac{1}{p}}\left(\int_{S^{n-1}}\int_0^r \varphi_+^p J\,ds\,d\theta\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq nV(r)+(n-1)\left(\frac{p-1}{p-n}\right)^{\frac{1}{2}} rV(r)^{1-\frac{1}{p}}\left(\int_{B_x(r)} \lambda_+^{\frac{p}{2}}\,dv\right)^{\frac{1}{p}}, \end{aligned}$$

したがって，

$$\left(\frac{V(r)}{r^n}\right)^{\frac{1}{p}-1}\left(\frac{V(r)}{r^n}\right)' \leq (n-1)\left(\frac{p-1}{p-n}\right)^{\frac{1}{2}} r^{-\frac{n}{p}}\left(\int_{B_x(r)} \lambda_+^{\frac{p}{2}}\,dv\right)^{\frac{1}{p}}$$

を得る．さらに積分を繰り返せば，$0 < r \leq R$ のとき，

$$\left(\frac{V(R)}{R^n}\right)^{\frac{1}{p}} - \left(\frac{V(r)}{r^n}\right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{n-1}{p-n}\left(\frac{p-1}{p-n}\right)^{\frac{1}{2}} R^{1-\frac{n}{p}}\left(\int_{B_x(R)} \lambda_+^{\frac{p}{2}}\,dv\right)^{\frac{1}{p}} \tag{2.12}$$

$r\to 0$とすれば，Peterson-Wei の体積評価の$K=0$の場合を得る．

定理2.1. (M, g)をn次元 Riemann 多様体とする．$p > n$，$R > 0$，$x\in M$に対し，

$$\frac{\mathrm{Vol}(B_x(R))}{R^n} \leq \left((n\omega)^{\frac{1}{p}} + \frac{n-1}{p-n}\left(\frac{p-1}{p-n}\right)^{\frac{1}{2}} R^{1-\frac{n}{p}}\left(\int_{B_x(R)} \lambda_+^{\frac{p}{2}}\,dv\right)^{\frac{1}{p}}\right)^p$$

が成立する．ここで，ωはS^{n-1} の標準的な体積である．

証明. $\lim_{r\to 0}\frac{V(r)}{r^n} = n\omega$から明らかである． □

さらに次の命題が成立する．

命題2.2. n次元 Riemann 多様体$(M,\ g)$，$p>n$，$R>0$，$x\in M$が与えられたとする．$0\leq\eta<1$であるηに対し，

$$R^2\left(\frac{1}{\mathrm{Vol}(B_x(R))}\int_{B_x(R)}\lambda_+^{\frac{p}{2}}\,dv\right)^{\frac{2}{p}}\leq\frac{(p-n)^3}{(p-1)(n-1)^2}\eta^2$$

が成立するならば，$0<r<R$のとき，

$$\frac{\mathrm{Vol}(B_x(r))}{r^n}\geq\frac{\mathrm{Vol}(B_x(R))}{R^n}(1-\eta)^p$$

が成立する．

証明．(2.12) を

$$\frac{V(r)}{r^n}\geq\frac{V(R)}{R^n}\left\{1-\frac{n-1}{p-n}\left(\frac{p-1}{p-n}\right)^{\frac{1}{2}}R\left(\frac{1}{V(R)}\int_{B_x(R)}\lambda_+^{\frac{p}{2}}\,dv\right)^{\frac{1}{p}}\right\}^p$$

と書き換えて，仮定

$$(n-1)R\left(\frac{1}{V(R)}\int_{B_x(R)}\lambda_+^{\frac{p}{2}}\,dv\right)^{\frac{1}{p}}\leq\left(\frac{(p-n)^3}{p-1}\right)^{\frac{1}{2}}\eta$$

から，

$$\frac{V(r)}{r^n}\geq\frac{V(R)}{R^n}(1-\eta)^p$$

を得る． □

3　Neck の体積

命題2.2では，$\lambda_+^{\frac{p}{2}}$の平均が十分小さいn次元 Riemann 多様体のクラスに対して，相対体積比較定理，さらには測地球の体積の局所増大性条件が成立することを示している．本節では，Gallot [1] に習い，一般的な条件，すなわち，ある$K>0$に対し，

$$\int_M\lambda_+^{\frac{p}{2}}\,dv\leq K \tag{3.1}$$

を満たすn次元 Riemann 多様体のクラスでは測地球の体積の局所増大性が導けないことを示す．

$\mathbb{R}$の正値関数bが与えられたとき，$\mathbb{R}\times S^{n-1}$に$g=ds^2+b(s)\hat{g}$で Riemann 計量を与える．ここで$\hat{g}$はS^{n-1}の標準的な計量である．$\mathbb{R}\times S^{n-1}$の各点で，接平面の正規直交系$\{\partial_s,\ \partial_i,\ \ldots\}$を，$\partial_s$が$\mathbb{R}$に沿うようにとれば，Codazzi の方程式から，

$$\mathrm{Ric}(\partial_i,\partial_i)=-\frac{b''}{b}+\frac{n-1}{b^2}(1-(b')^2)$$

$$\mathrm{Ric}(\partial_s,\partial_s)=-(n-1)\frac{b''}{b}$$

である．

$p>2n$とし，$\alpha\geq2$，$\delta>0$を$\alpha=\dfrac{p}{n-1}$，$\delta^{\alpha-1}=\dfrac{1}{2^{\frac{\alpha}{2}}\alpha}$と固定して，$\varepsilon<\delta$とする．

$|s|\leq\delta$の範囲でbを$b=b(s)=(s^2+\varepsilon^2)^{\frac{\alpha}{2}}$で定める．

$$b' = \alpha s(s^2+\varepsilon^2)^{\frac{\alpha}{2}-1},$$

$$b'' = \alpha(\alpha-1)(s^2+\varepsilon^2)^{\frac{\alpha}{2}-1} - \alpha(\alpha-2)\varepsilon^2(s^2+\varepsilon^2)^{\frac{\alpha}{2}-2}$$

$$\leq \alpha(\alpha-1)(s^2+\varepsilon^2)^{\frac{\alpha}{2}-1}$$

から，

$$b(\delta) = 2^{\frac{\alpha}{2}}\delta^{\alpha} = \frac{\delta}{\alpha},$$

$$b'(\delta) = \alpha 2^{\frac{\alpha}{2}-1}\delta^{\alpha-1} = \frac{1}{2},$$

$$b''(\delta) \leq \alpha(\alpha-1)2^{\frac{\alpha}{2}-1}\delta^{\alpha-2} = \frac{\alpha-1}{2\delta}$$

であるので，$\delta < |s| \leq 2\delta$ の範囲で，b'' が単調減少で，$b''(2\delta) = 0$，$b'(2\delta) = 1$，$b(2\delta) \leq 2^{\frac{\alpha}{2}}\delta^{\alpha} + \delta$ であり，$|s| > 2\delta$ の範囲で $b''(s) \equiv 0$，$b'(s) \equiv 1$ となるように，C^{∞} 級正値関数 $b = b_{\varepsilon} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を構成することができる．

Riemann 計量を $g = g_{\varepsilon} = ds^2 + b_{\varepsilon}\hat{g}$ で定義する．$\varepsilon > 0$ を変化させるとき，Riemann 多様体のクラス $\{(\mathbb{R}\times S^{n-1}, g)\}_{0<\varepsilon<\delta}$ に測地球の局所増大性条件が成立するとすれば，

$$\frac{\mathrm{Vol}(B_x(\varepsilon))}{\varepsilon^n} \geq c \tag{3.2}$$

となる ε によらない定数 $c > 0$ が存在する．

Codazzi の方程式から

$$\lambda_+ \leq \frac{b''}{b}$$

であり，$|s| > 2\delta$の範囲で $\lambda_+ \equiv 0$ であることは容易に確かめられる．

さらに，$|s| \leq \delta$の範囲で

$$\lambda_+^{\frac{p}{2}} b^{n-1} \leq \alpha^{\frac{p}{2}}(\alpha-1)^{\frac{p}{2}}$$

であり，$\delta < |s| \leq 2\delta$ の範囲で，$b(s) \geq \dfrac{\delta}{\alpha}$，$b''(s) \leq \dfrac{\alpha-1}{2\delta}$ であるので，

$$\lambda_+^{\frac{p}{2}} b^{n-1} \leq \frac{\alpha^{\frac{p}{2}-\frac{p}{\alpha}}(\alpha-1)^{\frac{p}{2}}}{2^{\frac{p}{2}}}\delta^{\frac{p}{\alpha}-p}$$

である．したがって，条件 (3.1) が

$$\int_{\mathbb{R}\times S^{n-1}} \lambda_+^{\frac{p}{2}}\, dv \leq 2\omega\alpha^{\frac{p}{2}}(\alpha-1)^{\frac{p}{2}}\delta + \frac{\omega\alpha^{\frac{p}{2}-\frac{p}{\alpha}}(\alpha-1)^{\frac{p}{2}}}{2^{\frac{p}{2}-1}}\delta^{\frac{p}{\alpha}-p+1} \equiv K$$

の形で成立する．

一方で，$x = (0, u) \in \mathbb{R}\times S^{n-1}$ を固定すると，

$$\mathrm{Vol}(B_x(\varepsilon)) \leq \int_{S^{n-1}}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} b^{n-1}\, ds\, d\theta \leq \omega 2^{\frac{p}{2}+1}\varepsilon^{p+1}$$

であり，$\varepsilon \to 0$のとき，

$$\frac{\mathrm{Vol}(B_x(\varepsilon))}{\varepsilon^n} \leq \omega 2^{\frac{p}{2}+1}\varepsilon^{p-n+1} \to 0$$

となる．(3.2) に反するので，この Riemann 多様体のクラスに対して測地球の局所増大性条件は成立しない．

4　別型の Ricci 曲率の積分ノルム

本節では L^p 型ノルムよりも強力な λ_+ の積分ノルムの評価から，測地球の局所増大性条件が導かれることを示す．

定理4.1.　$c > \frac{1}{e}$，$R > 0$，$K \geq 0$ とする．n 次元 Riemann 多様体 (M, g), $x \in M$ に対し，

$$\frac{1}{\mathrm{Vol}(B_x(R))}\int_{B_x(R)} \exp\left[(n-1)cR\lambda_+^{\frac{1}{2}}\right] dv \leq K \tag{4.1}$$

が成り立つならば，定数 $\kappa = \kappa(n, K, c) > 0$ が存在して，$0 < r < R$ である r に対し，

$$\frac{\mathrm{Vol}(B_x(r))}{r^n} \geq \kappa \frac{\mathrm{Vol}(B_x(R))}{R^n} \tag{4.2}$$

証明.　$V(r) = \mathrm{Vol}(B_x(r))$とおく．(4.1) から，任意の整数$p > n$に対し，

$$\frac{(n-1)^p c^p R^p}{V(R)}\int_{B_x(R)} \lambda_+^{\frac{p}{2}} dv \leq p!\, K$$

が成立する．

$$(n-1)R\left(\frac{1}{V(R)}\int_{B_x(R)} \lambda_+^{\frac{p}{2}} dv\right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{(p!\, K)^{\frac{1}{p}}}{c}$$

であるので，$\eta(p) = \eta(p, n, K, c) = \left(\frac{p-1}{(p-n)^3}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{(p!\, K)^{\frac{1}{p}}}{c}$ とおけば，

$$(n-1)R\left(\frac{1}{V(R)}\int_{B_x(R)} \lambda_+^{\frac{p}{2}} dv\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\frac{(p-n)^3}{p-1}\right)^{\frac{1}{2}} \eta(p)$$

であり，$\frac{(p!)^{\frac{1}{p}}}{p} \sim \frac{1}{e}$ から，$p \to \infty$ のとき，$\eta(p) = \left(\frac{p^2(p-1)}{(p-n)^3}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{(p!)^{\frac{1}{p}}}{cp} K^{\frac{1}{p}} \to \frac{1}{ce} < 1$である．したがって命題2.2から，

$$\frac{V(r)}{r^n} \geq \frac{V(R)}{R^n}(1-\eta(p))^p$$

が成立する．$\kappa = \kappa(n, K, c)$を，$\kappa = \max_{p > n,\ \eta(p) < 1}(1-\eta(p))^p$ で定めれば $0 < \kappa \leq 1$ であり，

$$\frac{V(r)}{r^n} \geq \kappa \frac{V(R)}{R^n} \tag{4.3}$$

が成立する．　□

測地球の体積の局所増大性について，次の系が成立する．

系4.2.　$c > \frac{1}{e}$，$D > 0$，$v > 0$，$K \geq 0$ とする．n 次元コンパクト Riemann 多様体 (M, g) が，$\mathrm{diam}(M) \leq D$, $\mathrm{Vol}(M) \geq v$および，

$$\frac{1}{\mathrm{Vol}(M)}\int_M \exp\left[(n-1)c\,\mathrm{diam}(M)\lambda_+^{\frac{1}{2}}\right] dv \leq K$$

を満たすならば，n, c, K にのみ依存した $\kappa > 0$ が存在して，$0 < r < \mathrm{diam}(M)$ のとき

$$\frac{\mathrm{Vol}(B_x(r))}{r^n} \geq \kappa \frac{v}{D^n}$$

が成立する．

参考文献

[1] S. Gallot, *Isoperimetric inequalities based on integral norms of Ricci curvature*, Astérisque, **157–158** (1988), 191–216.

[2] P. Petersen and G. Wei, *Relative volume comparison with integral curvature bounds*, GAFA **7** (1997), 1031–1045.

[3] P. Petersen and G. Wei, *Analysis and geometry on manifolds with integral Ricci curvature bounds*, Trans. Amer. Math. Soc. **353** (2001) 457–478.

[4] S. Zhu, *The Comparison Geometry of the Ricci Curvature*, Comparison Geometry, MSRI Publications, Volume **30**, (1987) 221–262.