

Ricci 曲率の積分ノルムが有界な Riemann 多様体について

廣 島 勉

1 測地球の体積の局所増大性条件

n 次元 Riemann 多様体 (M, g) の距離関数を d 、 $x \in M$ を中心とする半径 r の測地球を $B_x(r) = \{y \in M \mid d(x, y) \leq r\}$ 、その体積を $\text{Vol}(B_x(r))$ で表す。

著者の前論文 [2] では Riemann 多様体のクラスに対する測地球の体積の局所増大性条件に現れる定数を Ricci 曲率 Ric のある種の積分ノルムで評価する試みを行った。

定義 1 (測地球の体積の局所増大性条件) \mathcal{M} を n 次元 Riemann 多様体のクラスとする。 \mathcal{M} が測地球の体積の局所増大性条件を満たすとは、 \mathcal{M} に属する多様体に依存しないある定数 $\gamma > 0$ 、 $t > 0$ が存在して、任意の $(M, g) \in \mathcal{M}$ 、 $x \in M$ 、 r ($0 < r < t$) に対し

$$\frac{\text{Vol}(B_x(r))}{r^n} \geq \gamma$$

が成立することである。

この定数 γ を Ricci 曲率等から計算される、いろいろな幾何的量による評価を紹介する。

2 Ricci 曲率の下限の一様有界ノルム

(M, g) の直径と体積を、それぞれ $\text{diam}(M)$ 、 $\text{Vol}(M)$ で表すこととする。 $K, D > 0$ 、 $v > 0$ を任意の定数とすると、条件

$$\begin{aligned} \text{Ric} &\geq (n-1)Kg & (2.1) \\ \text{diam}(M) &\leq D \\ \text{Vol}(M) &\geq v \end{aligned}$$

を満たす n 次元コンパクト Riemann 多様体のクラス \mathcal{M} が「局所増大性条件」を満たすことは次の定理からの有名な帰結である。

定理 2.1 (Bishop-Gromov の比較定理) $\text{Ric} \geq (n-1)Kg$ である n 次元多様体 (M, g) において、 $x \in M$ 、 $R > r > 0$ とするならば、

$$\frac{\text{Vol}(B_x(r))}{V^K(r)} \geq \frac{\text{Vol}(B_x(R))}{V^K(R)}$$

が成立する。ここで、 $V^K(r)$ は曲率 K の n 次元定曲率空間における半径 r の測地球の体積である。

3 Ricci 曲率の下限の L^p ノルム

条件 (2.1) を Ricci 曲率の各点ごとの下限の積分、すなわち、

$$\lambda(x) = -\frac{1}{n-1} \min\{\text{Ric}(u, u) \mid u \in T_x(M), |u|=1\} \quad (3.1)$$

$$\lambda_+(x) = \max\{\lambda(x), 0\} \quad (3.2)$$

で定まる関数の積分の不等式に弱めようという試みが行われて来た。

Petersen, Wei ([3], [4]) らによって、 $D > 0$, $v > 0$, $p > n$ を任意の定数とすると、 p, n のみ依存する定数 $k = k(p, n)$ が存在し、条件

$$\frac{\text{diam}(M)^p}{\text{Vol}(M)} \int_M \lambda_+^{\frac{p}{2}} dv \leq k \quad (3.3)$$

$$\text{diam}(M) \leq D$$

$$\text{Vol}(M) \geq v$$

を満たす n 次元コンパクト Riemann 多様体のクラス \mathcal{M} に対し、「局所増大性条件」を満たすことが示された。ここで、 dv は (M, g) の体積要素である。

条件 (3.3) は $\lambda_+^{\frac{p}{2}}$ の M での平均 $\frac{1}{\text{Vol}(M)} \int_M \lambda_+^{\frac{p}{2}} dv$ が充分小さいことを要請している。これを一般の有界性条件、すなわち $p > n$, $K > 0$ を任意の定数とすると、条件

$$\int_M \lambda_+^{\frac{p}{2}} dv \leq K$$

に弱めることが不可能な事は [2] でも触れた。

例 1 $(-1, 1) \times S^{n-1} \subset M$ である n 次元多様体 M を固定し、 $\{0\} \times S^{n-1} \subset M$ の周辺で多様体 M を「括れさせ」、 $(-1, 1) \times S^{n-1}$ の外では変化しないパラメータ付の Riemann 計量 g_ε を考える。 $\varepsilon \rightarrow 0$ とするとき、ある定数 $K > 0$, $D > 0$, $v > 0$ に対して、 $\int_M \lambda_+^{\frac{p}{2}} dv < K$, $\text{diam}(M) \leq D$, $\text{Vol}(M) \geq v > 0$ を満たしつつ、 $x \in \{0\} \times S^{n-1}$ を中心とする測地球の体積が、

$$\frac{\text{Vol}(B_x(\varepsilon))}{\varepsilon^n} \rightarrow 0$$

となるような、Riemann 計量 g_ε を多様体 M に定める事ができる。

条件 (3.3) の定数 $k = k(p, n)$ を明示的に表すことが、[2] での結論に繋がる重要なステップであるので、ここで概観しておこう。

$\mathbb{R}_+ = \{s \in \mathbb{R} \mid s \geq 0\}$, $U_x M = \{u \in T_x M \mid |u|=1\}$ とする。極座標 $\mathbb{R}_+ \times U_x M \ni (s, u) \rightarrow \exp_x(su) \in M$ において (M, g) の体積要素を

$$dv = a^{n-1} ds du$$

$$a = a(s, u) \geq 0$$

と表す。 du は $U_x M \cong S^{n-1}$ の標準的な体積要素である。 $c(u)$ を $u \in U_x M$ 方向の cut value

$(c(u) = \sup\{t \mid d(x, \exp_x(su)) = s, 0 < \forall s < t\})$ とすると、 $0 < s < c(u)$ において $a = a(s, u)$ は、

$$a > 0, \quad \frac{\partial^2 a}{\partial s^2} \leq \lambda a \quad (3.4)$$

を満たす。ここで $\lambda = \lambda(\exp_x(su))$ は (3.2) で定義された関数である。 $s = 0$ においては、

$$a = 0, \quad \frac{\partial a}{\partial s} = 1, \quad \frac{\partial^2 a}{\partial s^2} = 0 \quad (3.5)$$

が成り立つ。

$0 < s < c(u)$ において関数 $\varphi = \varphi(s, u)$ 、 $\varphi_+ = \varphi_+(s, u)$ を

$$\varphi = \frac{1}{a} \frac{\partial a}{\partial s} - \frac{1}{s}, \quad (3.6)$$

$$\varphi_+ = \max\{\varphi, 0\}$$

で定める。(3.5) から、 $\lim_{s \rightarrow 0} \varphi(s, u) = 0$ であり、 $0 < r < c(u)$ 、 $p \geq 1$ のとき、 $A(r) = \int_0^r a^{n-1} ds$ とおくと、簡単な計算で、

$$\frac{\partial}{\partial r} \left\{ \left(\frac{A(r)}{r^n} \right)^{\frac{1}{p}} \right\} \leq \frac{n-1}{p} \left(\frac{1}{r^n} \int_0^r \varphi_+^p a^{n-1} ds \right)^{\frac{1}{p}} \quad (3.7)$$

を得る。

$p > n$ 、 $0 < r \leq c(u)$ のとき、(3.7) の両辺を $r \leq s \leq c(u)$ で積分し、

$$\left(\frac{A(c(u))}{c(u)^n} \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\frac{A(r)}{r^n} \right)^{\frac{1}{p}} + \frac{n-1}{p-n} \left(c(u)^{p-n} \int_0^{c(u)} \varphi_+^p a^{n-1} ds \right)^{\frac{1}{p}}$$

を得る。 $c(u) < r \leq \text{diam}(M)$ のとき、 $\frac{A(c(u))}{\text{diam}(M)^n} \leq \frac{A(c(u))}{r^n}$ であるから、 $0 < r \leq \text{diam}(M)$ のとき、 $c_r(u) = \min\{r, c(u)\}$ とおけば、

$$\frac{A(c_r(u))}{\text{diam}(M)^n} \leq \left\{ \left(\frac{A(c_r(u))}{r^n} \right)^{\frac{1}{p}} + \frac{n-1}{p-n} \left(\text{diam}(M)^{p-n} \int_0^{c(u)} \varphi_+^p a^{n-1} ds \right)^{\frac{1}{p}} \right\}^p \quad (3.8)$$

となる。

ここで、(3.8) の両辺を $U_x M$ で積分すると、 $\int_{U_x M} A(c(u)) d\omega = \text{Vol}(M)$ 、 $\int_{U_x M} A(c_r(u)) d\omega = \text{Vol}(B_x(r))$ となるので、

$$\frac{\text{Vol}(M)}{\text{diam}(M)^n} \leq \left\{ \left(\frac{\text{Vol}(B_x(r))}{r^n} \right)^{\frac{1}{p}} + \frac{n-1}{p-n} \left(\text{diam}(M)^{p-n} \int_M \varphi_+^p dv \right)^{\frac{1}{p}} \right\}^p \quad (3.9)$$

となる。

一方、 φ と λ の間には (3.4) と (3.6) から、

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = -\frac{2\varphi}{s} - \varphi^2 + \lambda \quad (3.10)$$

の関係が成立する。 $p > n$ のとき、この (3.10) から、Petersen, Wei らは φ_+ と、 λ_+ の間の積分不等式を導いた ([3], [4])。定数 $\left(\frac{p-1}{p-n} \right)^{\frac{p}{2}}$ の明示的な計算は [2] による。

$$\int_M \varphi_+^p dv \leq \left(\frac{p-1}{p-n} \right)^{\frac{p}{2}} \int_M \lambda_+^{\frac{p}{2}} dv. \quad (3.11)$$

したがって、(3.9)、(3.11) から、

$$\left(\frac{\text{Vol}(M)}{\text{diam}(M)^n}\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\frac{\text{Vol}(B_x(r))}{r^n}\right)^{\frac{1}{p}} + \frac{n-1}{p-n} \left(\frac{p-1}{p-n}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\text{diam}(M)^{p-n} \int_M \lambda_+^{\frac{p}{2}} d\nu\right)^{\frac{1}{p}} \quad (3.12)$$

を得る。

続く定理は (3.12) から従う。

定理 3.1 (M, g) を n 次元 Riemann 多様体とする。 $p > n$ に対し、

$$\frac{\text{Vol}(M)}{\text{diam}(M)^n} \leq \left(\left(\frac{\omega}{n}\right)^{\frac{1}{p}} + \frac{n-1}{p-n} \left(\frac{p-1}{p-n}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\text{diam}(M)^{p-n} \int_M \lambda_+^{\frac{p}{2}} d\nu\right)^{\frac{1}{p}}\right)^p$$

が成立する。ここで、 ω は S^{n-1} の標準的な体積である。

定理 3.2 n 次元コンパクト Riemann 多様体 (M, g) 、 $p > n$ 、 $x \in M$ が与えられたとする。 $0 \leq \eta < 1$ である η に対し、

$$\frac{\text{diam}(M)^p}{\text{Vol}(M)} \int_M \lambda_+^{\frac{p}{2}} d\nu \leq \left(\frac{(p-n)^3}{(p-1)(n-1)^2}\right)^{\frac{p}{2}} r^p \quad (3.13)$$

が成立するならば、 $0 < r < \text{diam}(M)$ のとき、

$$\frac{\text{Vol}(B_x(r))}{r^n} \geq \frac{\text{Vol}(M)}{\text{diam}(M)^n} (1-\eta)^p$$

が成立する。

λ_+ の L^p ノルムから、定義 1 の定数 γ の評価を導くことは不可能であった。そこで、以降では c を適当な定数として、 λ_+ のより強い積分ノルム

$$\int_M \exp(c\lambda_+^{\frac{p}{2}}) d\nu \quad (3.14)$$

を考えよう。

4 指数関数積分ノルムが有界な多様体

ここでは、 λ_+ は有界ではないが、(3.14) の積分は有界となるような Riemann 計量 g の例を挙げる。もちろんこの Riemann 計量は滑らかではない。

例 1 と同様に、 $(-1, 1) \times S^{n-1} \subset M$ である n 次元コンパクト多様体 M を固定する。 $(-1, 1) \subset \mathbb{R}$ の標準的な Riemann 計量を ds^2 、 S^{n-1} の標準的な Riemann 計量を h とする。 $(-1, 1) \times S^{n-1} \subset M$ において M の Riemann 計量 g が $(-1, 1)$ 上の正値関数 $b = b(s)$ を用いて、

$$g = ds^2 + b(s)h$$

で与えられているとする。このとき、 $(-1, 1) \times S^{n-1}$ の接平面において、 ∂_s を $(-1, 1)$ に沿う接ベクトル、 ∂_i を S^{n-1} に沿う接ベクトルとすれば、Codazzi の方程式から、

$$\text{Ric}(\partial_s, \partial_s) = -(n-1) \frac{b''}{b} \quad (4.1)$$

$$\text{Ric}(\partial_i, \partial_i) = -\frac{b''}{b} + \frac{n-1}{b^2} (1-(b')^2) \quad (4.2)$$

である。 $s \neq 0$ のとき、 $\sigma > 0$ を固定して、

$$b(s) = \frac{1}{2}s^2 \left(\log |s| - \frac{3}{2} \right)^2 + \sigma^2$$

と定める。 $b'(s) = s \left(\log |s| - \frac{3}{2} \right) \left(\log |s| - \frac{1}{2} \right)$ なので、 b は $s = 0$ に C^1 級となるように延長できるが

$$b''(s) = (\log |s|)^2 - \frac{5}{4}$$

であるので、 b は C^2 級ではなく、 $s \rightarrow 0$ のとき、 $\frac{b''}{b} \rightarrow \infty$ であるので、(4.1)、(4.2) から、 $\lim_{s \rightarrow 0} \lambda_+ = \infty$ である。

(4.2) における第 2 項は有界であるので、 $\exp(c\lambda_+^{\frac{p}{2}})$ の主要部分は、

$$\exp \left(c \sqrt{\frac{|b''|}{b}} \right)$$

である。 $(-1, 1)$ では $\sqrt{|b''|} \leq \sqrt{(\log |s|)^2} = -\log |s|$ 、 $b \geq \sigma^2$ なので、

$$\exp \left(c \sqrt{\frac{|b''|}{b}} \right) < \exp \left(-\frac{c}{\sigma} \log |s| \right) = |s|^{-\frac{c}{\sigma}}$$

となる。

$(-1, 1) \times S^{n-1}$ の体積要素は $dv = b^{n-1} ds d\omega$ で与えられるので、適当な定数 $C > 0$ をとれば、

$$\int_{(-1, 1) \times S^{n-1}} \exp(c\lambda_+^{\frac{p}{2}}) dv \leq C \int_0^1 s^{-\frac{c}{\sigma}} ds$$

となり、 $\sigma > c$ のとき、この積分は収束する。

このように、(3.14) の定数 c が大きくなって、有界の条件が厳しくなるほど、 σ が大きくなって、Neck が太くなることがわかる。

5 Ricci 曲率の下限の指数関数積分ノルム

まず、 $\max \lambda_+$ による定義 1 の定数 γ の評価を定理 3.2 の文脈で考えてみよう。

(3.13) から、

$$\kappa(p) = \left(\frac{(p-1)(n-1)^2}{(p-n)^3} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\text{diam}(M)^p}{\text{Vol}(M)} \int_M \lambda_+^{\frac{p}{2}} dv \right)^{\frac{1}{p}}$$

と定義する。定理 3.2 によれば、 $\kappa(p) < 1$ であれば、

$$\frac{\text{Vol}(B_r(r))}{r^n} \geq \frac{\text{Vol}(M)}{\text{diam}(M)^n} (1 - \kappa(p))^p$$

が成立することがわかる。 $p \rightarrow \infty$ のとき、

$$\alpha(p) = \left(\frac{(p-1)(n-1)^2}{(p-n)^3} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{n-1}{p-n} \left(1 + \frac{n-1}{p-n} \right)^{\frac{1}{2}} \rightarrow 0,$$

$$b(p) = \left(\frac{\text{diam}(M)^p}{\text{Vol}(M)} \int_M \lambda_+^{\frac{p}{2}} dv \right)^{\frac{1}{p}} \rightarrow \text{diam}(M) \max \lambda_+^{\frac{1}{2}}$$

である。Hölder の不等式から $b(p)$ は増加列であることに注意しよう。

$0 < \eta < 1$ なる η を任意に選ぶ。 $\max \lambda_+ \leq K$ 、 $\text{diam}(M) \leq D$ 、 $\text{Vol}(M) \geq \nu > 0$ のとき、 $a(p) \leq \frac{\sqrt{n(n-1)}}{p-n} \leq \frac{\eta}{D\sqrt{K}}$ となる p 、例えば、

$$p = n + \frac{\sqrt{n(n-1)}}{\eta} D\sqrt{K}$$

を選べば、 $\kappa(p) = a(p)b(p) \leq \eta$ となり、

$$\frac{\text{Vol}(B_x(r))}{r^n} \geq \frac{v}{D^n} (1-\eta)^n + \frac{\sqrt{n(n-1)}}{\eta} D\sqrt{K}$$

が成立する。すなわち、

$$\gamma = \frac{v}{D^n} (1-\eta)^n + \frac{\sqrt{n(n-1)}}{\eta} D\sqrt{K}$$

とすれば良いことがわかる。

次に、 $K > 0$, $D > 0$, $v > 0$ が与えられたとき、

$$\frac{1}{\text{Vol}(M)} \int_M \exp(c \text{diam}(M) \lambda_+^{\frac{1}{2}}) dv \leq K$$

$$\text{diam}(M) \leq D$$

$$\text{Vol}(M) \geq v > 0$$

の条件を考えよう。定数 c の条件は後に定める。

(5.1) から

$$\frac{\text{diam}(M)^p}{\text{Vol}(M)} \int_M \lambda_+^{\frac{p}{2}} dv \leq \frac{p! K}{c^p}$$

が直ちに従う。

従って、

$$\kappa(p) \leq \frac{(p!)^{\frac{1}{p}} K^{\frac{1}{p}}}{(p-n)} \sqrt{1 + \frac{n-1}{p-1} \times \frac{n-1}{c}}$$

となる。右辺は $p \rightarrow \infty$ のとき、 $\frac{1}{e} \times \frac{n-1}{c}$ に収束する。

したがって、 $0 < \eta < 1$ なる η が与えられたとき、 $c > \frac{n-1}{e\eta}$ なる c をえらべば、右辺が η 以下となる最初の p ($p > n$) が、 c , η , K , n から計算できる。この p に対し、

$$\gamma = \frac{v}{D^n} (1-\eta)^p$$

と γ をとれば良い。

このように、 $\lim_{p \rightarrow \infty} \kappa(p) = 0$ であるので、 p を大きく取ればいつかは $\kappa(p) < 1$ になるのであるが、 γ の評価のためには、 $\kappa(p) < 1$ となる p の評価が必要になるのである。他の型の積分ノルムではどうなのかと言う問題は、今後の研究課題としたい。

参考文献

- [1] S. Gallot, *Isoperimetric inequalities based on integral norms of Ricci curvature*, Astérisque, 157–158 (1988), 191–216.
- [2] T. Hiroshima *Volumes of Geodesic Balls and Integral Norms of Ricci Curvature on Riemannian Manifolds*, NUCB Journal of Economics and Information Science Vol. 48 No. 2, (2004) 229–236.
- [3] P. Petersen and G. Wei, *Relative volume comparison with integral curvature bounds*, GAFA7 (1997), 1031–1045.
- [4] P. Petersen and G. Wei, *Analysis and geometry on manifolds with integral Ricci curvature bounds*, Trans. Amer. Math. Soc. 353 (2001) 457–478.

- [5] S. Zhu, *The Comparison Geometry of the Ricci Curvature*, Comparison Geometry, MSRI Publications, Volume 30, (1987) 221–262.