等周不等式とある種の Ricci 曲率積分

廣 島 勉

1 はじめに

前論文では，測地球の体積と Ricci 曲率 Ric のある種の積分ノルムの関連を論じた．本稿では同様のノルムと等周定数との関連を Croke [1] の方法を辿ることで論じたい．

n 次元コンパクト Riemann 多様体 (M, g) において，等周定数 C_I は次のように定義される．

定義 1（等周定数）

$$C_I = \inf_B \frac{\mathrm{Vol}(\partial B)^n}{\mathrm{Vol}(B)^{n-1}} \tag{1.1}$$

ここで inf は，$\mathrm{Vol}(B) < \frac{1}{2}\mathrm{Vol}(M)$ であるような，境界 ∂B が滑らかな領域 $B \subset M$ を動かしてとる．$\mathrm{Vol}(\partial B)$ はその境界の部分多様体としての体積である．

$\mathbb{R}_+ = \{s \in \mathbb{R} \mid s \geq 0\}$，$U_x M = \{u \in T_x M \,\big|\, |u| = 1\}$，$UM = \cup_{x \in M} U_x M$ とする．

前論文 [3], [4] での議論の対象としたのは Ricci 曲率から定まる関数の積分ノルムであった．

定義 2（関数 λ_+） $\lambda : M \to \mathbb{R}$ を，

$$\lambda(x) = -\frac{1}{n-1}\min\{\mathrm{Ric}(u,u) \mid u \in U_x M\} \tag{1.2}$$

で，$\lambda_+ : M \to \mathbb{R}_+$ を

$$\lambda_+(x) = \max\{\lambda(x), 0\} \tag{1.3}$$

で定める．

λ_+ の L^p 型ノルムで等周定数 C_I の評価を試みたのは，Gallot [2] が最初であろうと思われる．しかし，L^p 型ノルムでは条件が若干弱く，次のような例を構成することが可能であった．

例 1 $(-1,\ 1) \times S^{n-1} \subset M$ である n 次元多様体 M を固定し，$\{0\} \times S^{n-1} \subset M$ の周辺で多様体 M を「括れさせ」，$(-1,\ 1) \times S^{n-1}$ の外では変化しないパラメータ付の Riemann 計量 g_ε を考える．$\varepsilon \to 0$ とするとき，ある定数 $K > 0$, $D > 0$, $v > 0$ に対して $\int_M \lambda_+^{\frac{p}{2}} dv < K$, $\mathrm{diam}(M) \leq D$, $\mathrm{Vol}(M) \geq v > 0$ を満たしつつ，$(n-1)$ 次元部分多様体 $\{0\} \times S^{n-1}$ の体積が，0 に収束するような，Riemann 計量 g_ε を多様体 M に定める事ができる．

極座標 $\mathbb{R}_{+}\times U_x M \ni (s,\ u) \mapsto \exp_x(su) \in M$ において $(M,\ g)$ の体積要素 dv を

$$dv = a^{n-1}\, ds\, d\omega$$

$$a = a(s,u) \geq 0$$

と表す．$d\omega$ は $U_x M \cong S^{n-1}$ の標準的な体積要素である．

$c(u)$ を $u \in U_x M$ 方向の cut value，すなわち，

$$c(u) = \sup\{t \,|\, d(x, \exp_x(su)) = s, 0 < {}^{\forall}s < t\}$$

とすると，$0 < s < c(u)$ において$a = a(s,\ u)$ は，

$$a > 0,\quad \frac{\partial^2 a}{\partial s^2} \leq \lambda a \tag{1.4}$$

を満たす．$\lambda = \lambda(\exp_x(su))$ は（1.2）で定義された関数である．

定義３（関数 φ_{+}） 関数 $\varphi = \varphi(s,\ u)$，$\varphi_{+} = \varphi_{+}(s,\ u)$ を

$$\varphi = \frac{1}{a}\frac{\partial a}{\partial s} - \frac{1}{s} \tag{1.5}$$

$$\varphi_{+} = \max\{\varphi, 0\}$$

で定義する．

φ と λ の間には次の関係式が成立する。

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = -\frac{2\varphi}{s} - \varphi^2 + \lambda \tag{1.6}$$

$p > n$ のとき，この（1.6）から，Petersen，Wei らは φ_{+} と，λ_{+} の間の積分不等式を導いた（[5]，[6]）．定数 $\left(\dfrac{p-1}{p-n}\right)^{\frac{p}{2}}$ の明示的な計算は［3］による．

$$\int_M \varphi_{+}^{p}\, dv \leq \left(\frac{p-1}{p-n}\right)^{\frac{p}{2}} \int_M \lambda_{+}^{\frac{p}{2}}\, dv. \tag{1.7}$$

２　領域を見込む立体角

$B \subset M$ を境界 ∂B が滑らかな領域で，$\overline{B} = M \backslash B$ とする．$u \in UM$ に対し，

$$l(u) = \sup\{t > 0 \,|\, \exp_x(su) \in B, 0 < {}^{\forall}s < t\} \tag{2.1}$$

とする．$0 < l(u) < \infty$ のとき，$x \in B$ であり，測地流を $\xi_s u = \dfrac{d}{ds}\exp_x(su)$ で表すと，$-\xi_{l(u)} u \in TxM$ は境界 ∂B における M の内向きの単位接ベクトルである．$\widetilde{U}_x B$ を

$$\widetilde{U}_x B = \{u \in U_x B \,|\, l(-u) < c(-u)\} \tag{2.2}$$

とする．

$$\overline{B}=\{\exp_x(-su)|u\in\widetilde{U}_xB, l(-u)\leq s\leq c(-u)\} \tag{2.3}$$

となることに注意しよう．$0<r<c(-u)$ のとき，$A(-u,\ r)=\int_0^r a(-u,\ s)^{n-1}ds$ とおくと，

$$\mathrm{Vol}(\overline{B})=\int_{\widetilde{U}_xB}(A(-u,c(-u))-A(-u,l(-u)))\,d\omega \tag{2.4}$$

が成立する．

また，$p\geq1$ のとき，

$$\frac{\partial}{\partial r}\left\{\left(\frac{A(-u,r)}{r^n}\right)^{\frac{1}{p}}\right\}\leq\frac{n-1}{p}\left(\frac{1}{r^n}\int_0^r\varphi_+^p a^{n-1}\,ds\right)^{\frac{1}{p}} \tag{2.5}$$

が成立することは［3］でも述べた．

$u\in\widetilde{U}_xB$ のとき，(2.5) を $0<r<c(-u)$ で積分して，

$$\left(\frac{A(-u,c(-u))}{c(-u)^n}\right)^{\frac{1}{p}}-\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{p}}\leq\frac{n-1}{p-n}\left(c(-u)^{p-n}\int_0^{c(-u)}\varphi_+^p a^{n-1}\,ds\right)^{\frac{1}{p}}$$

を得る．$c(-u)\leq\mathrm{diam}(M)$ であるので，

$$\frac{A(-u,c(-u))}{\mathrm{diam}(M)^n}\leq\left\{\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{p}}+\frac{n-1}{p-n}\left(\mathrm{diam}(M)^{p-n}\int_0^{c(-u)}\varphi_+^p a^{n-1}\,ds\right)^{\frac{1}{p}}\right\}^p \tag{2.6}$$

となる．

さらに，(2.6) の両辺を $\widetilde{U}_xB$ で積分して，

$$\frac{\mathrm{Vol}(\overline{B})}{\mathrm{diam}(M)^n}\leq\left\{\left(\frac{\mathrm{Vol}(\widetilde{U}_xB)}{n}\right)^{\frac{1}{p}}+\frac{n-1}{p-n}\left(\mathrm{diam}(M)^{p-n}\int_M\varphi_+^p\,dv\right)^{\frac{1}{p}}\right\}^p \tag{2.7}$$

を得る．

したがって，(2.7), (1.7) から，続く定理を得る．

定理2.1　$(M,\ g)$ を n 次元コンパクト Riemann 多様体とする．$B\subset M$ を境界 ∂B が滑らかな領域で，$\overline{B}=M\backslash B$ とする．$x\in B,\ p>n$ に対し，

$$\frac{\mathrm{Vol}(\overline{B})}{\mathrm{diam}(M)^n}\leq\left\{\left(\frac{\mathrm{Vol}(\widetilde{U}_xB)}{n}\right)^{\frac{1}{p}}+\frac{n-1}{p-n}\left(\frac{p-1}{p-n}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\mathrm{diam}(M)^{p-n}\int_M\lambda_+^{\frac{p}{2}}\,dv\right)^{\frac{1}{p}}\right\}^p \tag{2.8}$$

が成立する．ここで，$\mathrm{Vol}(\widetilde{U}_xB)$ は S^{n-1} の標準的な体積で計算する．

3　境界よりの積分

UM には M の Riemann 計量 g から定まる自然な体積要素 dU が定義される．

$x\in\partial B$ とする．$n\in U_xM$ を ∂B の内向きの単位法ベクトル，$U_x^+\partial B$ を，

$$U_x^+\partial B=\{v\in U_xM|\langle n,v\rangle>0\} \tag{3.1}$$

とする．$u\in U_x^+\partial B$ に対し，$\tilde{l}(u)$ を

$$\tilde{l}(u)=\min\{c(u),l(u)\} \tag{3.2}$$

とすると，

$$\widetilde{U}B=\bigcup_{x\in B}\widetilde{U}_xB=\{\xi_s u|u\in U_x^+\partial B,\ 0<s\leq\tilde{l}(u)\} \tag{3.3}$$

であり，次の等式はよく知られた結果である．

命題3.1　$\tilde{U}B$ 上の関数 F に対し，

$$\int_{\widetilde{U}B}F(u)dU=\int_{\partial B}\int_{U_x^+\partial B}\langle n,u\rangle\int_0^{\tilde{l}(u)}F(\xi_t(u))\,dt\,d\omega\,d\bar{v} \tag{3.4}$$

$$\mathrm{Vol}(\widetilde{U}B)=\int_{\widetilde{U}B}du=\int_{\partial B}\int_{U_x^+\partial B}\langle n,u\rangle\tilde{l}(u)d\omega\,d\bar{v} \tag{3.5}$$

が成立する．ここで，$d\bar{v}$ は境界 ∂B に誘導された体積要素である．

Croke［1］の巧みなところは，Berger-Kazdan による次の不等式の応用である．

定理3.2　$(M,\ g)$ を n 次元 Riemann 多様体，$u\in UM,\ l<c(u)$ のとき，

$$l^{n+1}\leq\frac{2\pi^n\omega_{n-1}}{\omega_n}\int_0^l\int_0^{l-t}a(\xi_tu,s)^{n-1}\,ds\,dt \tag{3.6}$$

が成立する．$\omega_n,\ \omega_{n-1}$ は単位球 $S^n,\ S^{n-1}$ の標準的な体積である．

Hölder の不等式とともに，定理3.2を命題3.1に適用すると，

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}(\widetilde{U}B)&\leq\left(\int_{\partial B}\int_{U_x^+\partial B}\langle n,u\rangle\tilde{l}(v)^{n+1}d\omega\,d\bar{v}\right)^{\frac{1}{n+1}}\left(\int_{\partial B}\int_{U_x^+\partial B}\langle n,u\rangle\,d\omega\,d\bar{v}\right)^{\frac{n}{n+1}}\\&\leq\left(\frac{2\pi^n\omega_{n-1}}{\omega_n}\int_{\partial B}\int_{U_x^+\partial B}\langle n,u\rangle\int_0^{\tilde{l}(u)}\int_0^{\tilde{l}(u)-t}a(\xi_tu,s)^{n-1}\,ds\,dt\,d\omega\,d\bar{v}\right)^{\frac{1}{n+1}}\\&\times\left(\frac{\omega_{n-1}}{n}\mathrm{Vol}(\partial B)\right)^{\frac{n}{n+1}}\end{aligned}$$

$\tilde{l}(u)-t\leq\tilde{l}(\xi_tu)$ に注意して，

$$\leq\mathrm{Vol}(\partial B)^{\frac{n}{n+1}}\left(\frac{2\pi^n\omega_{n-1}^{n+1}}{n^n\omega_n}\int_{\partial B}\int_{U_x^+\partial B}\langle n,u\rangle\int_0^{\tilde{l}(u)}\int_0^{\tilde{l}(\xi_tu)}a(\xi_tu,s)^{n-1}\,ds\,dt\,d\omega\,d\bar{v}\right)^{\frac{1}{n+1}}$$

$F(\xi_tu)=\int_0^{\tilde{l}(\xi_tu)}a(\xi_tu,\ s)^{n-1}\,ds$ として，再び命題3.1から，

$$\leq\mathrm{Vol}(\partial B)^{\frac{n}{n+1}}\left(\frac{2\pi^n\omega_{n-1}^{n+1}}{n^n\omega_n}\int_{\widetilde{U}B}\int_0^{\tilde{l}(u)}a(u,s)^{n-1}\,ds\,dU\right)^{\frac{1}{n+1}}$$

$$=\mathrm{Vol}(\partial B)^{\frac{n}{n+1}}\left(\frac{2\pi^n\omega_{n-1}^{n+1}}{n^n\omega_n}\int_B\int_{\tilde{U}_xB}\int_0^{\tilde{l}(u)}a(u,s)^{n-1}\,ds\,d\omega\,dv\right)^{\frac{1}{n+1}}$$

$$\leq\mathrm{Vol}(\partial B)^{\frac{n}{n+1}}\left(\frac{2\pi^n\omega_{n-1}^{n+1}}{n^n\omega_n}\int_B\mathrm{Vol}(B)\,dv\right)^{\frac{1}{n+1}}=\mathrm{Vol}(\partial B)^{\frac{n}{n+1}}\left(\frac{2\pi^n\omega_{n-1}^{n+1}}{n^n\omega_n}\mathrm{Vol}(B)^2\right)^{\frac{1}{n+1}} \quad (3.7)$$

定理2.8を $x\in B$ に関し積分して (3.7) を適用すると，次の命題を得る．

命題3.3　n 次元コンパクト Riemann 多様体 $(M,\ g)$ において，$B\subset M$ を境界 ∂B が滑らかな領域で，$\overline{B}=M\backslash B$ とする．$p>n$ のとき，

$$\left(\frac{\mathrm{Vol}(\overline{B})}{\mathrm{diam}(M)^n}\right)^{\frac{1}{p}}-\frac{n-1}{p-n}\left(\frac{p-1}{p-n}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\mathrm{diam}(M)^{p-n}\int_M\lambda_+^{\frac{p}{2}}\,dv\right)^{\frac{1}{p}}\leq\left(\left(\frac{2\pi^n\omega_{n-1}^{n+1}}{n^{2n+1}\omega_n}\frac{\mathrm{Vol}(\partial B)^n}{\mathrm{Vol}(B)^{n-1}}\right)^{\frac{1}{n+1}}\right)^{\frac{1}{p}} \quad (3.8)$$

が成立する．特に $\mathrm{Vol}(B)<\frac{1}{2}\mathrm{Vol}(M)$ の場合,

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{p}}-\frac{n-1}{p-n}\left(\frac{p-1}{p-n}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\mathrm{diam}(M)^p}{\mathrm{Vol}(M)}\int_M\lambda_+^{\frac{p}{2}}\,dv\right)^{\frac{1}{p}}\leq\left(\frac{\mathrm{diam}(M)^n}{\mathrm{Vol}(M)}\left(\frac{2\pi^n\omega_{n-1}^{n+1}}{n^{2n+1}\omega_n}\frac{\mathrm{Vol}(\partial B)^n}{\mathrm{Vol}(B)^{n-1}}\right)^{\frac{1}{n+1}}\right)^{\frac{1}{p}} \quad (3.9)$$

を得る．

4　等周不等式

$p\to\infty$ のとき，

$$\left(\frac{\mathrm{diam}(M)^p}{\mathrm{Vol}(M)}\int_M\lambda_+^{\frac{p}{2}}\,dv\right)^{\frac{1}{p}}\to\mathrm{diam}(M)\max\lambda_+^{\frac{1}{2}} \quad (4.1)$$

であるので，(3.9) の左辺は 1 に収束する．したがって，$0<\eta<1$ なる定数を固定すると，十分大きい $p>n$ に対し，

$$\frac{n^{2n+1}\omega_n}{2\pi^n\omega_{n-1}^{n+1}}\frac{\mathrm{Vol}(M)^{n+1}}{\mathrm{diam}(M)^{n(n+1)}}\eta^{p(n+1)}\leq\frac{\mathrm{Vol}(\partial B)^n}{\mathrm{Vol}(B)^{n-1}} \quad (4.2)$$

が成立する．[4] でのように，このような p を λ_+ のある種の積分から評価できればよい．

$K>0,\ D>0,\ v>0$ が与えられたとき，

$$\frac{1}{\mathrm{Vol}(M)}\int_M\exp(c\ \mathrm{diam}(M)\lambda_+^{\frac{1}{2}})\,dv\leq K \quad (4.3)$$

$$\mathrm{diam}(M)\leq D$$

$$\mathrm{Vol}(M)\geq v>0$$

の条件を考えよう．定数 c の条件は後に定める．

(4.3) から

$$\frac{\mathrm{diam}(M)^p}{\mathrm{Vol}(M)}\int_M \lambda_+^{\frac{p}{2}}\,dv \le \frac{p!K}{c^p}$$

が直ちに従う.

このとき，(3.9) の左辺は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{p}} - \frac{(p!)^{\frac{1}{p}}K^{\frac{1}{p}}}{(p-n)}\sqrt{1+\frac{n-1}{p-1}}\times\frac{n-1}{c} \tag{4.4}$$

で下から評価され，さらにこれ は，$1-\frac{1}{e}\times\frac{n-1}{c}$ に収束する.

したがって，$0<\eta<1$ なる η が与えられたとき，$c>\frac{n-1}{e\eta}$ なる c をえらべば，(3.9) の右辺が η 以下となる最初の $p\,(p>n)$ が，c, η, K, n から計算できる．以上のことから次の結果を得る.

定理4.1　(M, g)を n 次元コンパクト Riemann 多様体とする．$0<\eta<1$ なる η が与えられたとき，$c>\frac{n-1}{e\eta}$ なる c に対して，$K>0$, $D>0$, $v>0$ が与えられ,

$$\frac{1}{\mathrm{Vol}(M)}\int_M \exp(c\ \mathrm{diam}(M)\lambda_+^{\frac{1}{2}})\,dv \le K$$
$$\mathrm{diam}(M)\le D$$
$$\mathrm{Vol}(M)\ge v>0$$

を満たしているとする．このとき，c, η, K, n のみに依存する $p>n$ が存在して，M の等周定数 C_I に対し,

$$C_I \ge \frac{n^{2n+1}\omega_n v^{n+1}\eta^{p(n+1)}}{2\pi^n\omega_{n-1}^{n+1}D^{n(n+1)}} \tag{4.5}$$

が成立する.

5　終わりに

例2　g が C^2 級でなく，λ_+ は有界ではないが，$\frac{1}{\mathrm{Vol}(M)}\int_M \exp(c\ \mathrm{diam}(M)\lambda_+^{\frac{1}{2}})\,dv$ が有界となるような Riemann 計量 g を$(-1,\ 1)\times S^{n-1}$ において

$$g = ds^2 + b(s)^2 h \tag{5.1}$$

$$b(s) = \frac{1}{2}s^2\left(\log|s| - \frac{3}{2}\right)^2 + \sigma^2 \tag{5.2}$$

で構成することができる. ここで, h は S^{n-1} の標準的計量, σ は c 等から定めるパラメータである. 詳しくは[4]を参照していただきたい.

参考文献

[1] B. Croke, *Some Isoperimetric Inequalities and eigenvalue estimates,* Ann. scient. Éc. Norm. Sup., **4**e série, t. **13** (1980), 419–435.

[2] S. Gallot, *Isoperimetric inequalities based on integral norms of Ricci curvature*, Astérisque, **157**–**158** (1988), 191–216.

[3] T. Hiroshima *Volumes of Geodesic Balls and Integral Norms of Ricci Curvature on Riemannian Manifolds*, NUCB Journal of Economics and Information Science Vol. **48** No. **2**, (2004) 229–236.

[4] T. Hiroshima *On Riemannian Manifolds whose Ricci Curvature has some Integral Bounds*, NUCB Journal of Economics and Information Science Vol. **49** No. **2**, (2005) 283–289.

[5] P. Petersenand G. Wei, *Relative volume comparison with integral curvature bounds*, GAFA**7** (1997), 1031–1045.

[6] P. Petersenand G. Wei, *Analysis and geometry on manifolds with integral Ricci curvature bounds*, Trans. Amer. Math. Soc. **353** (2001) 457–478.

[7] S. Zhu, *The Comparison Geometry of the Ricci Curvature*, Comparison Geometry, MSRI Publications, Volume **30**, (1987) 221–262.