

関数形が特定化された累積プロスペクト理論とリスク下の選択

鏑 田 亨

概 要

リスク下の選択について、プロスペクト理論は期待効用理論の代替としてさまざまな分野で応用されてきている。しかし Neilson and Stowe (2002) は、これに対し、関数形を特定化されたプロスペクト理論について、典型的なアノマリーと整合的なパラメータが存在しないことを示している。

本論文では、Gonzalez and Wu (1999) によるウェイト関数にもとづき、Neilson and Stowe (2002) の結論を再検討する。

1 はじめに

リスク下における決定の標準的な理論としては期待効用理論があげられる。そこでは、総効用は確率をウェイトとした最終的狀態による効用の加重平均としてとらえられる。しかし Allais のパラドクスのような、期待効用理論では説明できないアノマリーが存在する。Kahneman and Tversky (1979) はアンケート調査から以下のような選択の傾向を指摘し、プロスペクト理論を提唱した。

- ・効用は最終的な状態ではなく、状態の変化（利得あるいは損失）によって決定される。
- ・利得局面では危険回避的であるが、損失局面では危険追求的である。
- ・損失による効用の低下は、同額の利得による効用の増加よりも大きい（損失回避）。
- ・中程度以上の確率は過小評価される傾向があり、危険回避的な傾向が強められる。
- ・ごく小さな確率は過大評価される傾向があり、危険追求的な選択を導く。

オリジナルのプロスペクト理論では、各結果が生じる確率の関数としてウェイト関数が仮定された。しかしこの場合、ウェイトの合計が1になるとは限らず、確率優越が成立しない。Quiggin (1982) は、各結果が生じる確率ではなく確率分布からウェイトが決定される rank-dependent 汎関数を提示した。Tversky and Kahneman (1992) はこれに基づき、累積プロスペクト理論を定式化した。

累積プロスペクト理論は、株式プレミアムや非対称的な価格弾力性、現状維持バイアスなどさまざまな現象の説明に用いられている¹⁾。また Tversky and Kahneman (1992) にはじまり、Camerer and Ho (1994) や Wu and Gonzalez (1996) など多くの研究で、関数形を特定したうえで、価値関数およびウェイト関数のパラメータが推計されている。

1) Camerer (1998) が豊富な例をあげている。

これに対し Neilson and Stowe (2002) は、関数形を特定化した累積プロスペクト理論において、「ありそうにない利得に対する賭け (gambling on unlikely gain)」や Allais の逆説などを同時に説明できるパラメータが存在しないことを指摘している。

そこで本論文では、パラメータが複数存在する Gonzalez and Wu (1999) によるウェイト関数でも、Neilson and Stowe (2002) の結論が成立するののかについて検討する。第2節では累積プロスペクト理論についての紹介をする。まず累積プロスペクト理論を概観し、過去の実証研究で用いられたウェイト関数について検討する。その上で過去の実証研究によるパラメータの推定値を紹介する。第3節では、Neilson and Stowe (2002) でとりあげられたリスク下における選択と累積プロスペクト理論の関係について解説する。第4節では、Tversky and Kahneman (1992) と Gonzalez and Wu (1999) によって採用されたウェイト関数を採用したときに、第3節で取り上げられたリスク下の選択が採択されるために必要なパラメータについての計算結果を紹介する。

2 累積プロスペクト理論

2.1 理論の概要

$m+n+1$ 個の結果からなる賞金くじを考える。得られる賞金は $x_{-m} < \dots < x_0 < \dots < x_n$ であり、それぞれ p_{-m}, \dots, p_n の確率で生じるものとする。ただし x_0, \dots, x_n は利得であり、 x_{-m}, \dots, x_{-1} は損失である。この賞金くじを $f = (x_{-m}, p_{-m}; \dots; x_n, p_n)$ で表わすことにする。また f の正の部分を $f^+ = (x_0, p_0; \dots; x_n, p_n)$ 、負の部分を $f^- = (x_{-m}, p_{-m}; \dots; x_0, p_0)$ で表わすことにする。

効用関数 V は利得についての部分と損失についての部分の2つに分けられる。

$$V(f) = V(f^+) + V(f^-) \quad (1)$$

確率ウェイト関数を w とする。 $w(0) = 0$ および $w(1) = 1$ を仮定する。利得に対する確率ウェイト関数を w^+ 、損失に対する確率ウェイト関数を w^- とする。利得 x_i に対する意思決定ウェイトを π_i^+ 、損失 x_i に対する意思決定ウェイトを π_i^- で表わす。 π_n^+ および π_{-m}^- については

$$\pi_n^+ = w^+(p_n) \quad (2)$$

$$\pi_{-m}^- = w^-(p_{-m}) \quad (3)$$

とする。それ以外の意思決定ウェイトは

$$\pi_i^+ = w^+(p_n + \dots + p_i) - w^+(p_n + \dots + p_{i+1}), \quad 0 \leq i \leq n-1 \quad (4)$$

$$\pi_i^- = w^-(p_{-m} + \dots + p_i) - w^-(p_{-m} + \dots + p_{i-1}), \quad -m+1 \leq i \leq 0 \quad (5)$$

とする。つまり意思決定ウェイトは、単なる事象の確率ではなく、確率の累積分布に対する事象の限界的な寄与によって決まる。 $\sum_{i=0}^n \pi_i^+ = 1$ であり、 $\sum_{i=-m}^0 \pi_i^- = 1$ である。

価値関数を v とする。 $v(x_0) = 0$ を仮定する。

$$V(f^+) = \sum_{i=0}^n \pi_i^+ v(x_i), \quad (6)$$

$$V(f^-) = \sum_{i=-m}^0 \pi_i^- v(x_i), \quad (7)$$

である。 $i \geq 0$ のとき $\pi_i = \pi_i^+$ 、 $i < 0$ のとき $\pi_i = \pi_i^-$ とすれば、

$$V(f) = \sum_{i=-m}^n \pi_i v(x_i) \quad (8)$$

となる。

選好が同次であれば相対リスク回避度は一定となる。このとき価値関数 v はベキ関数として表わされる。Tversky and Kahneman (1992) などでは以下のような価値関数が仮定されている²⁾。

$$v(x) = \begin{cases} x^\alpha & \text{if } x \geq 0 \\ -\lambda(-x)^\alpha & \text{if } x < 0 \end{cases} \quad (9)$$

$x \geq 0$ は利得、 $x < 0$ は損失を表わす。価値関数は α が小さいほど利得局面で危険回避的になり、損失局面で危険追求的になる。 λ は損失回避係数である。

2.2 ウェイト関数

ウェイト関数 w については、 $w(0) = 0$ 、 $w(1) = 1$ が仮定される。

また中程度以上の確率が過小評価され、ごく小さな確率が過大評価される傾向から、ウェイト関数は逆 S 字型になると考えられる。これを Tversky and Kahneman (1992) は参照点 (確率の場合は 0 と 1) の近くでは確率の変化に敏感であるが、参照点から離れるにつれて確率の変化に対する感応性が低下する³⁾ ためだと説明している。

2.2.1 Tversky and Kahneman (1992) のウェイト関数

Tversky and Kahneman (1992) は以下のようなウェイト関数を仮定している⁴⁾。

$$w^+(p) = \frac{p^\gamma}{(p^\gamma + (1-p)^\gamma)^{1/\gamma}} \quad (10)$$

このような関数形を選択した理由として彼らは、(1)パラメータが 1 つであるという単純さ、(2)逆 S 字型の形状、(3) $w(0.5) = 0.5$ である必要がないこと、(4)データとのあてはまりがよいことを挙げている。

図 1 は $\gamma = 0.1$ から $\gamma = 1$ のときまで 0.1 きざみで (10) 式を図示したものである。 γ が 1 のとき、ウェイト関数は 45 度線となる。 γ が小さいほど逆 S 字型は強まり、低い確率が過大に評価されることになる。また γ が小さいほど、45 度線とより左側で交わるようになる。このことはより低い確率でも過小評価されることを意味する。

2) Tversky and Kahneman (1992) では、利得局面と損失局面で異なる指数を仮定しているが、ただし推計結果からは両者が等しいとしている。

3) 彼らはこれを「感応性の通減 (diminishing sensitivity)」と呼んでいる。

4) Tversky and Kahneman (1992) では、利得局面と損失局面ではパラメータは異なると仮定して γ を推定している。

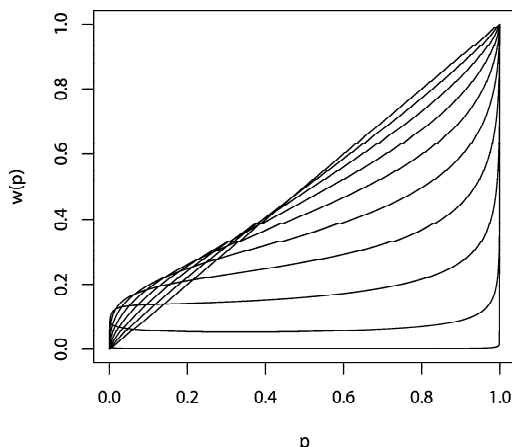


図1 Tversky and Kahneman (1992) によるウェイト関数

また0.1あるいは0.2といったごく小さい値を γ がとる場合には $w' > 0$ でない部分が生じている。

2.2.2 Prelec (1998) によるウェイト関数

Prelec (1998) は以下のようなウェイト関数を仮定している。

$$w(p) = e^{-(-\ln p)^\gamma} \quad (11)$$

図2は $\gamma = 0.1$ から $\gamma = 1$ のときまで0.1きざみで(11)式を図示したものである。このウェイト関数は、 $p = 1/e \approx 0.37$ のとき45度線と交わる。(10)式と同じように、 γ が小さいほど逆S字型が強まる。

2.2.3 Gonzalez and Wu (1999) のウェイト関数

Gonzalez and Wu (1999) は、ウェイト関数の形状を決定する要因として、感応性の通減だけではなく、確率に対するウェイトの絶対水準をあげている。彼らはこれを魅力 (attractiveness) と呼んでいる。ウェイトおよび確率の対数オッズの関係が一次式のとき、この2つの独立した要因を2つのパラメータによって表わすことができる。

$$\ln \frac{w(p)}{1-w(p)} = \gamma \ln \frac{p}{1-p} + \tau \quad (12)$$

これを $w(p)$ に解くことにより次式を得る。

$$w(p) = \frac{\delta p^\gamma}{\delta p^\gamma + (1-p)^\gamma} \quad (13)$$

ただし $\delta = \exp \tau$ である。(13)式がGonzalez and Wu (1999) の用いたウェイト関数である。(13)式において、 γ はウェイト関数の曲率を、 δ はウェイトの絶対水準を制御する。図3は、 γ は0.1から0.9まで0.2きざみの値を、 δ は0.2から1.6まで0.35きざみの値をとった場合の(13)式を図示したものである。

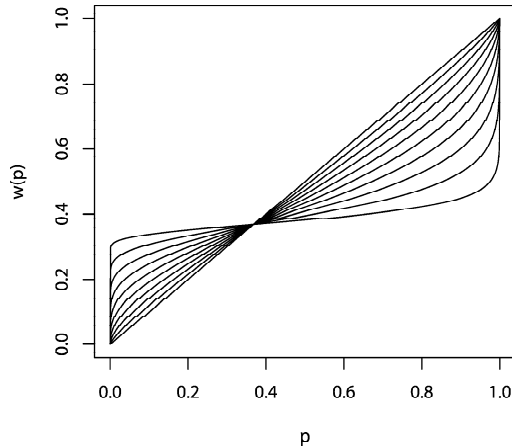


図2 Prelec (1998) によるウェイト関数

2.3 過去の推計結果

表1は、過去の実証研究によるパラメータの推計結果を示している。「式」の列は推計に用いたウェイト関数の式番号である。価値関数については、すべて(9)式を用いている。

ウェイト関数の曲率を表わす(10)式の γ の推定値は0.56から0.74の間であり、比較的近い値となっている。一方、価値関数のパラメータ α の推定値は最低で0.32、最高で0.88であり、かなりの違いがある。特にTversky and Kahneman (1992)の推計結果では、リスク中立的な価値関数を示唆している。

Gonzalez and Wu (1999)は、10人の被験者に対する実験から、(9)および(13)式のパラメータを推計している。

表1 パラメータの推計結果

	式	α	λ	γ	γ for gains	γ for losses
Tversky and Kahneman (1992)	(10)	0.88	2.25		0.61	0.69
Camerer and Ho (1994)	(10)	0.32		0.56		
Wu and Gonzalez (1996)	(10)	0.52		0.74		
Wu and Gonzalez (1996)	(11)	0.48		0.74		

表2はその推計結果である。括弧内の数値は標準誤差である。

各パラメータの推定値の中央値はそれぞれ $\alpha=0.45$ 、 $\delta=0.77$ 、 $\gamma=0.44$ となっている。ただし被験者によってパラメータの推定値はかなり異なる。

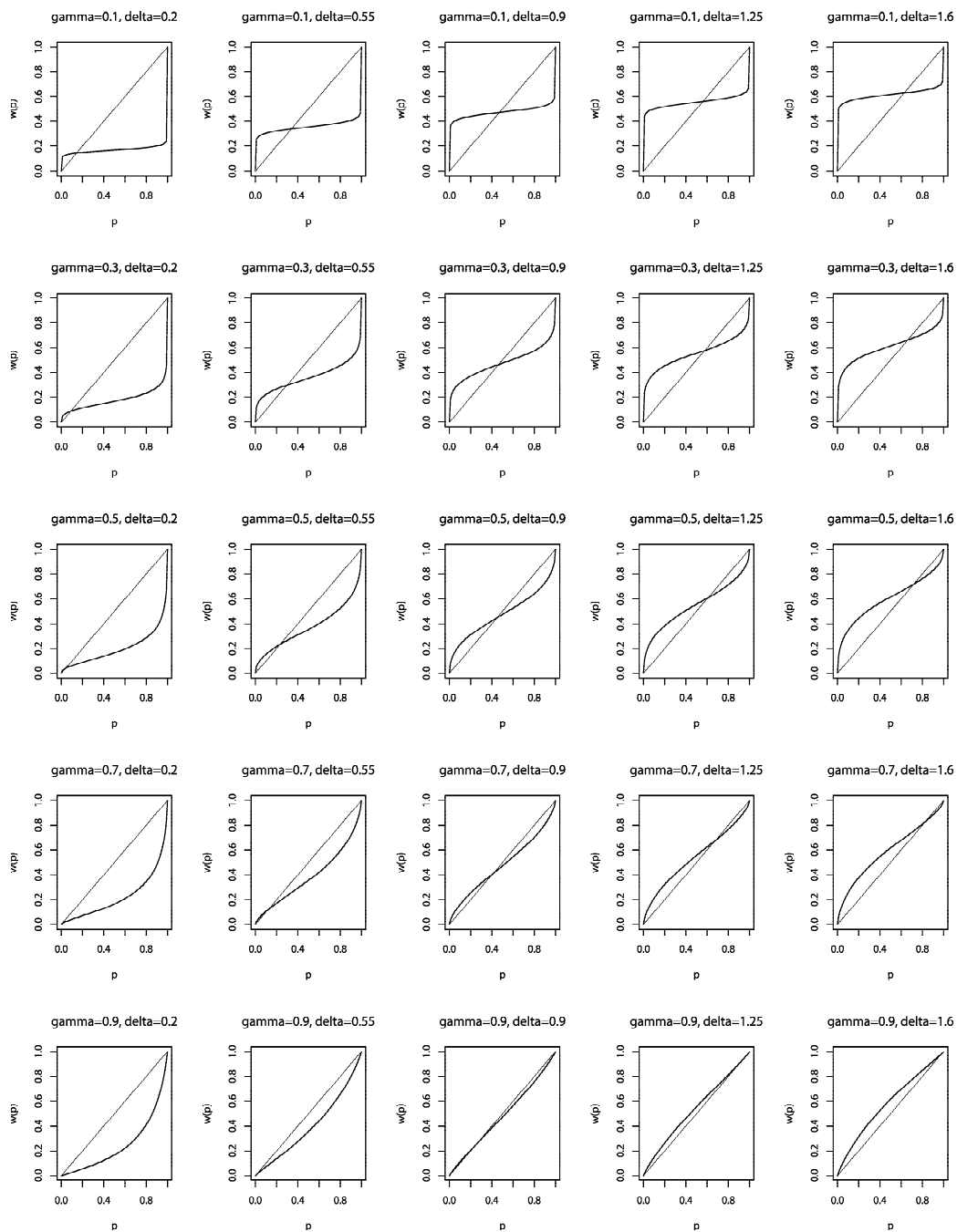


図3 Gonzalez and Wu (1999) によるウェイト関数

表2 Gonzalez and Wu (1999) の推計結果

被験者	α	δ	γ
1	0.68 (0.10)	0.46 (0.11)	0.39 (0.03)
2	0.23 (0.06)	1.51 (0.46)	0.65 (0.04)
3	0.65 (0.12)	1.45 (0.35)	0.39 (0.02)
4	0.59 (0.05)	0.21 (0.04)	0.15 (0.02)
5	0.40 (0.08)	1.19 (0.32)	0.27 (0.02)
6	0.68 (0.06)	1.33 (0.15)	0.89 (0.03)
7	0.60 (0.06)	0.38 (0.07)	0.20 (0.02)
8	0.39 (0.07)	0.38 (0.11)	0.37 (0.04)
9	0.52 (0.08)	0.90 (0.18)	0.86 (0.04)
10	0.45 (0.09)	0.93 (0.26)	0.50 (0.03)
Median data	0.49 (0.04)	0.77 (0.10)	0.44 (0.01)

3 リスク下における選択

3.1 ありそうにない利得に対する賭け

低い確率は過大に評価される。そのために主体は、たとえ効用関数がリスク回避的であったとしても、十分に確率が低い利得に対する公正な賭けを行なうと考えられる。

確率 p で金額 G を得られるが、確率 $1-p$ で何も得られないという賭けを考える。プロスペクト理論に基づけば、期待値 pG を確実に得るよりもこの賭けが選択されるための条件は

$$w(p)v(G) + (1-w(p))v(0) > v(pG) \quad (14)$$

となる。 v について (9) 式を仮定すると、(14) 式は次式のように書き直せる。

$$w(p) > p^\alpha \quad (15)$$

3.2 Allais の逆説

Neilson and Stowe (2002) は Allais の逆説として、以下のような例をとりあげている。

以下のようなクジを考える。

$$A = (\$1M, 1)$$

$$B = (\$0, 0.01; \$1M, 0.89; \$5M, 0.10)$$

$$C = (\$0, 0.89; \$1M, 0.11)$$

$$D = (\$0, 0.90; \$5M, 0.10)$$

ただし M は 100 万を表わしている。被験者の典型的な選択はクジ B よりもクジ A を選択し、クジ C よりもクジ D を選択するというものである⁵⁾。

プロスペクト理論に基づけば、以上の選択がされるためには以下の2つの式が満たされなければならない。

$$v(1M) > w(0.10)v(5M) + (w(0.99) - w(0.10))v(1M) + (1 - w(0.99))v(0) \quad (16)$$

$$w(0.10)v(5M) + (1 - w(0.10))v(0) > w(0.11)v(1M) + (1 - w(0.11))v(0) \quad (17)$$

一方、Kahneman and Tversky (1979) は Allais の逆説のヴァリエーションとして以下のような例をあげている。

以下のようなクジを考える⁶⁾。

$$E = (0, 0.01; 2400, 0.66; 2500, 0.33)$$

$$F = (2400, 1)$$

$$G = (0, 0.67; 2500, 0.33)$$

$$H = (0, 0.66; 2400, 0.34)$$

クジ E とクジ F を比較したとき、100人中82人の被験者がクジ F を選択した。一方、クジ G とクジ H を比較した場合には、100人中83人の被験者がクジ G を選択した。プロスペクト理論に基づけば、この選択パターンが成立するためには以下の2つの式が満たされなければならない。

$$v(2400) > w(0.33)v(2500) + (w(0.99) - w(0.66))v(2400) + (1 - w(0.99))v(0) \quad (18)$$

$$w(0.33)v(2500) + (1 - w(0.33))v(0) > w(0.34)v(2400) + (1 - w(0.34))v(0) \quad (19)$$

3.3 Battalio, Kagel and Jiranyakul (1990)

Battalio et al. (1990) は、実際に賞金が受け取れる2つのクジを被験者に選択させた。確率 p で賞金 x が受け取れることができ、確率 $1-p$ で何も得られないクジを $(\$x, p)$ で表わす。その結果

- ・ 80%の被験者は $(\$20, 0.6)$ よりも $(\$12, 1)$ を選択した。
- ・ 81%の被験者は $(\$20, 0.12)$ よりも $(\$12, 0.2)$ を選択した。
- ・ 84%の被験者は $(\$18, 0.2)$ よりも $(\$27, 0.16)$ を選択した。

5) 期待効用理論に基づけばクジ B よりもクジ A が選択されるということは

$$u(1M) > 0.10u(5M) + 0.89u(1M) + 0.01u(0)$$

を意味する。一方、クジ C よりもクジ D が選択されるということは

$$0.10u(5M) + 0.90u(0) > 0.11u(1M) + 0.89u(0)$$

を意味する。この2つの式は矛盾する。

6) 貨幣単位としてはイスラエルポンドが用いられている。当時の家計の月当たりの純所得の中央値は約3000イスラエルポンドであった。

プロスペクト理論に基づき、以上の選択がなされるためには、それぞれ以下の式が成立しなければならない。

$$v(\$12) > w(0.6)v(\$20) \quad (20)$$

$$w(0.2)v(\$12) > w(0.12)v(\$20) \quad (21)$$

$$w(0.16)v(\$27) > w(0.2)v(\$18) \quad (22)$$

4 選択を成立させるパラメータ

本節では「ありそうにない利得に対する賭け」、Allais の逆説、Battalio et al. (1990) の例を成立させる価値関数およびウェイト関数のパラメータの組み合わせについて考察する。価値関数については (9) 式を、ウェイト関数については Tversky and Kahneman (1992) によるもの ((10) 式) と Gonzalez and Wu (1999) によるもの ((13) 式) をとりあげる。

4.1 Tversky and Kahneman (1992) のウェイト関数の場合

まずウェイト関数が (10) 式の場合を検討する。

4.1.1 Neilson and Stowe (2002) による Allais の逆説

図 4 の(a)は、確率が 0.01, 0.1, 0.2, 0.3 のときに「ありそうにない利得に対する賭け」が行なわれる場合 ((14) 式) と、Allais の逆説が成立する場合 ((16) および (17) 式) の γ と α の

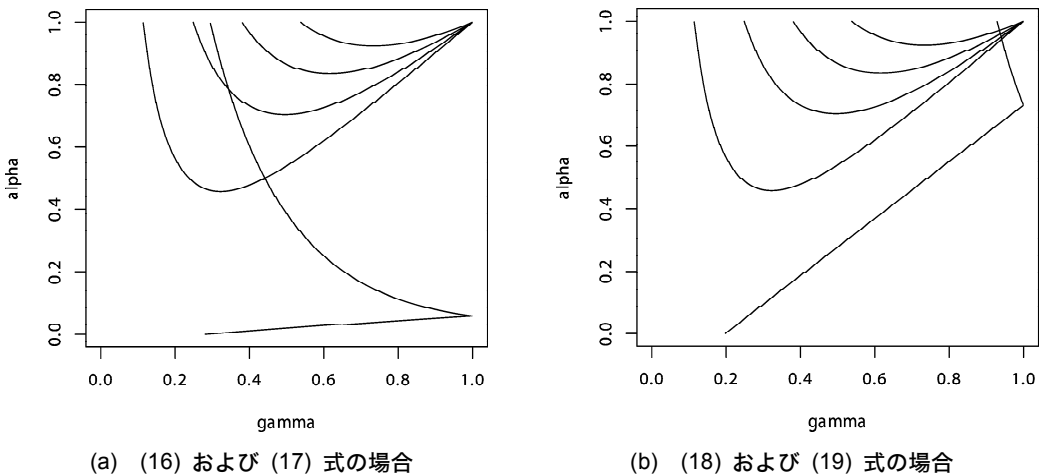


図 4 ありそうにない利得に対する賭けと Allais の逆説

組み合わせを示している。

図 4(a)の 4 本の U 字型の曲線が、それぞれ下から確率が 0.01, 0.1, 0.2, 0.3 のときの閾値であり、これよりも上の領域が (14) 式を満たしている。

「ありそうにない利得に対する賭け」が行なわれるためには、ウェイト関数による低い確率の過大評価が価値関数のリスク回避性を超えなければならない。ウェイト関数は低い確率ほど過

大に評価するため、確率が低い場合ほど同じ γ の値の下で低い α の値でも賭けが行なわれる。価値関数のリスク回避性が高く、 α の値が低い場合、「ありそうにない利得に対する賭け」が行なわれるためには、低い確率がより過大に評価される必要がある。このためにはより小さな γ の下でウェイト関数の逆 S 字型が強まる必要がある。このことが閾値の U 字型の右側の部分の形状を説明する。

しかし Tversky and Kahneman (1992) のウェイト関数では、 γ の値が小さくなるとより小さな確率でも過小評価されるようになる。そのため、ある程度以上 γ が小さい場合には、 γ が小さくなるほど α が大きくなる必要がある。このことが閾値の U 字型の左側の部分の形状を説明する。

図 4 (a) の右上りの曲線は (16) 式の閾値を、右下がりの曲線は (17) 式の閾値を表わしている。この 2 本の曲線に囲まれた部分が Neilson and Stowe (2002) による Allais の逆説と整合的なパラメータの組み合わせである。

確率が 0.1 よりも大きいときに「ありそうにない利得に対する賭け」と Allais の逆説の両者と整合的な γ と α の組み合わせはごく限られている⁷⁾。しかも 2.3 節で取り上げた Camerer and Ho (1994) および Wu and Gonzalez (1996) のパラメータの推定値では、「ありそうにない利得に対する賭け」および Allais の逆説とともに非整合的である。Tversky and Kahneman (1992) のパラメータの推定値は、確率が 0.2 のときの「ありそうにない利得に対する賭け」と整合的であるが、Allais の逆説とは同様に非整合的である。

4.1.2 Kahneman and Tversky (1979) による Allais の逆説のヴァリエーション

これに対し図 4 (b) は、確率が 0.01, 0.1, 0.2, 0.3 のときに「ありそうにない利得に対する賭け」が行なわれる場合 ((14) 式) と、Kahneman and Tversky (1979) による Allais の逆説のヴァリエーションが成立する場合 ((18) および (19) 式) の γ と α の組み合わせを示している。

Neilson and Stowe (2002) による Allais の逆説では、クジ A の確実な利得は $1M$ であり、クジ B の期待値は $1.39M$ であった。 γ の値が 1 に近いとき、(16) 式が成立し、クジ A がクジ B よりも選択されるためには、低い α の値が必要である。同様にクジ C の期待値は $0.89M$ 、クジ D の期待値は $4.5M$ であり、 γ の値が 1 に近いときにクジ D がクジ C よりも選択されるための閾値となる α の値は小さくなる。

これに対し Kahneman and Tversky (1979) による Allais の逆説のヴァリエーションでは、クジ F の確実な利得は 2400 であり、クジ E の期待値は 2409 である。このため γ の値が 1 に近いときに (18) 式が成立し、クジ F がクジ E よりも選択されるために必要な γ の値は、(16) 式が成立し、クジ B がクジ A よりも選択されるための γ よりも高くなる。同様にクジ G の期待値は 825、クジ H の期待値は 816 であり、 γ の値が 1 に近いときにクジ G がクジ H よりも選択されるための閾値となる α の値は (17) 式が成立し、クジ D がクジ C よりも選択されるための γ よりも高くなる。

このため、2.3 節で取り上げた Tversky and Kahneman (1992)、Camerer and Ho (1994) および Wu and Gonzalez (1996) のパラメータの推定値はすべて Kahneman and Tversky (1979) による

7) Neilson and Stowe (2002) では、「ありそうにない利得に対する賭け」が行なわれる確率は 0.2~0.3 と推測されている。

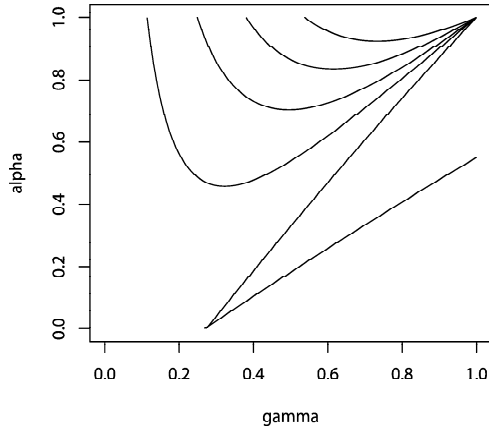


図5 ありそうにない利得に対する賭けと Battalio et al. (1990) による例

Allais の逆説のヴァリエーションと整合的である。

4.1.3 Battalio et al. (1990)

図5は確率が0.01, 0.1, 0.2, 0.3のときに「ありそうにない利得に対する賭け」が行なわれる場合 ((14) 式) と、(21) 式および (22) 式が成立する場合の γ と α の組み合わせを図示している⁸⁾。

図5の2つの右上りの曲線のうち、傾きが急なものが (21) 式の閾値であり、これより下の領域が (21) 式を満たす。また傾きがより緩やかな曲線が (22) 式の閾値であり、これより上の領域が (22) 式を満たす。つまりこの2つの曲線にはさまれた領域の γ および α が、Battalio et al. (1990) の例と整合的となる。

(21) 式について、(\$20, 0.12) と (\$12, 0.2) の期待値はともに\$2.4である。したがって $\gamma = \alpha = 1$ は (21) 式の閾値となる。 α が小さくなると相対的に高い利得に対する評価が下がる。それを補って2つの賭けが無差別になるためには、低い確率がより過大に評価される必要がある。このため (21) 式の閾値は右上りの曲線となる。

一方 (\$18, 0.2) の期待値は\$3.6、(\$27, 0.16) の期待値は\$4.32である。したがって γ が1のとき、2つの賭けが無差別であるための α は1よりも小さくなり、この閾値よりも α が大きければ (\$27, 0.16) 選択される。 γ が小さくなると相対的に低い確率が過大に評価されるようになる。そのため、2つの賭けが無差別になるためには価値関数がよりリスク回避的になる必要があり、このことは α のさらなる低下を意味する。したがって (22) 式の閾値は右上りの曲線となる。

図5で注目すべき点は、Battalio et al. (1990) で示された選択パターンと整合的な γ と α の組み合わせが、たとえ確率が0.01のときでも「ありそうにない利得に対する賭け」とは非整合的であることである。このことはウェイト関数として (10) 式を用いた場合、累積プロスペクト理論では主体の選択を整合的に説明できないことを意味する。

8) γ および α が [0,1] の値をとる場合には、常に (20) 式は満たされる。

4.2 Gonzalez and Wu (1999) のウェイト関数の場合

つぎにウェイト関数が (13) 式の場合を検討する。

4.2.1 Neilson and Stowe (2002) による Allais の逆説

図 6 は、確率が 0.01, 0.1, 0.2 のときに「ありそうにない利得に対する賭け」が行なわれる場合 ((14) 式) と、Allais の逆説が成立する場合 ((16) および (17) 式) の γ と α の組み合わせを、 δ が 0.15 きざみで 0.2 から 1.85 の値をとるときについてそれぞれ図示したものである。

左上の 3 本の右上りの曲線が、それぞれ下から確率が 0.01, 0.1, 0.2 のときの閾値であり⁹⁾、これよりも上の領域が (14) 式を満たしている。 δ が高いほど、確率に対するウェイトの絶対水準が上昇する。このため δ が高いほど、 γ の値を一定とすると、より低い α でも「ありそうにない利得に対する賭け」が選択されるようになる。

δ の値が大きいとき、 γ の値が大きいと、高い確率のときの「ありそうにない利得に対する賭け」の閾値となる α の方が低くなっている。これは、閾値となる α は $\ln w(p)/\ln(p)$ であるが、 δ が 1 を超えるとき、 γ の値が高くなると、 $\ln w(p)/\ln(p)$ は低い領域の確率では減少関数となるためである¹⁰⁾。

右下がりの曲線の下領域は (16) 式を満たす領域である。 δ の値が高いと、ウェイトの絶対水準が上昇するため (16) 式の右辺が大きくなる。そのため (16) 式が成立するためには、同じ γ の下での α が低下する必要がある。

一番下に位置する右上りの曲線の上領域は (17) 式を満たす領域である。 δ が大きくなるほど $w(0.10)$ は $w(0.11)$ よりも過大に評価されるようになる。そのため (17) 式が成立するためには、同じ γ の下での α は小さくなる必要がある。したがって δ が大きくなると閾値を示す曲線は下にシフトする。

δ の値が低いときには Allais の逆説と整合的な領域は広い。一方、「ありそうにない利得に対する賭け」と整合的な領域は狭くなっている。 δ の値が高くなると「ありそうにない利得に対する賭け」と整合的な領域は広がるが、それ以上に Allais の逆説と整合的な領域が狭くなるため、両者と整合的な領域は狭くなる。

Gonzalez and Wu (1999) による推定値の中央値 ($\alpha=0.49$, $\delta=0.77$, $\gamma=0.44$) を用いた場合、確率が 0.2 のときでも「ありそうにない利得に対する賭け」は選択されず、Allais の逆説が成立するための (16) 式とも非整合的である。

4.2.2 Kahneman and Tversky (1979) による Allais の逆説のヴァリエーション

図 7 は、確率が 0.01, 0.1, 0.2 のときに「ありそうにない利得に対する賭け」が行なわれる場合 ((14) 式) と、Kahneman and Tversky (1979) による Allais の逆説のヴァリエーションが成立する場合 ((18) および (19) 式) の γ と α の組み合わせを、 δ が 0.15 きざみで 0.2 から 1.85 の値をとるときについてそれぞれ図示したものである。

9) δ が 0.2 のとき、 $p=0.2$ で (14) 式を満たす γ と α の組み合わせはグラフの領域にはない。したがって右上の 2 つの右上りの曲線が、それぞれ下から確率が 0.01 および 0.1 のときの閾値である。

10) ウェイト関数が (10) のときには、 γ の値にかかわらず $\ln w(p)/\ln(p)$ は確率の増加関数である。

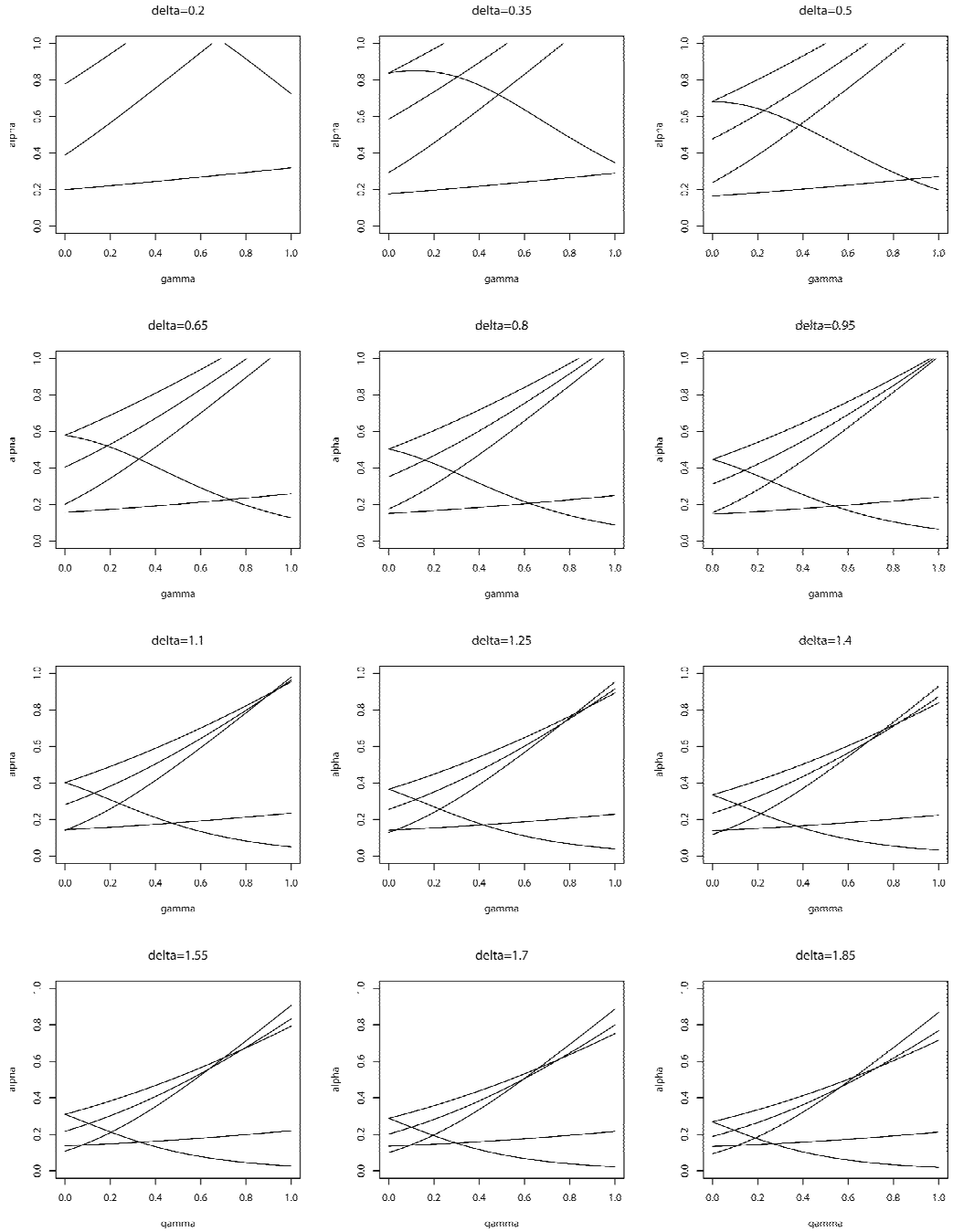


図6 ありそうにない利得に対する賭けと Allais の逆説 ((16) および (17) 式の場合)

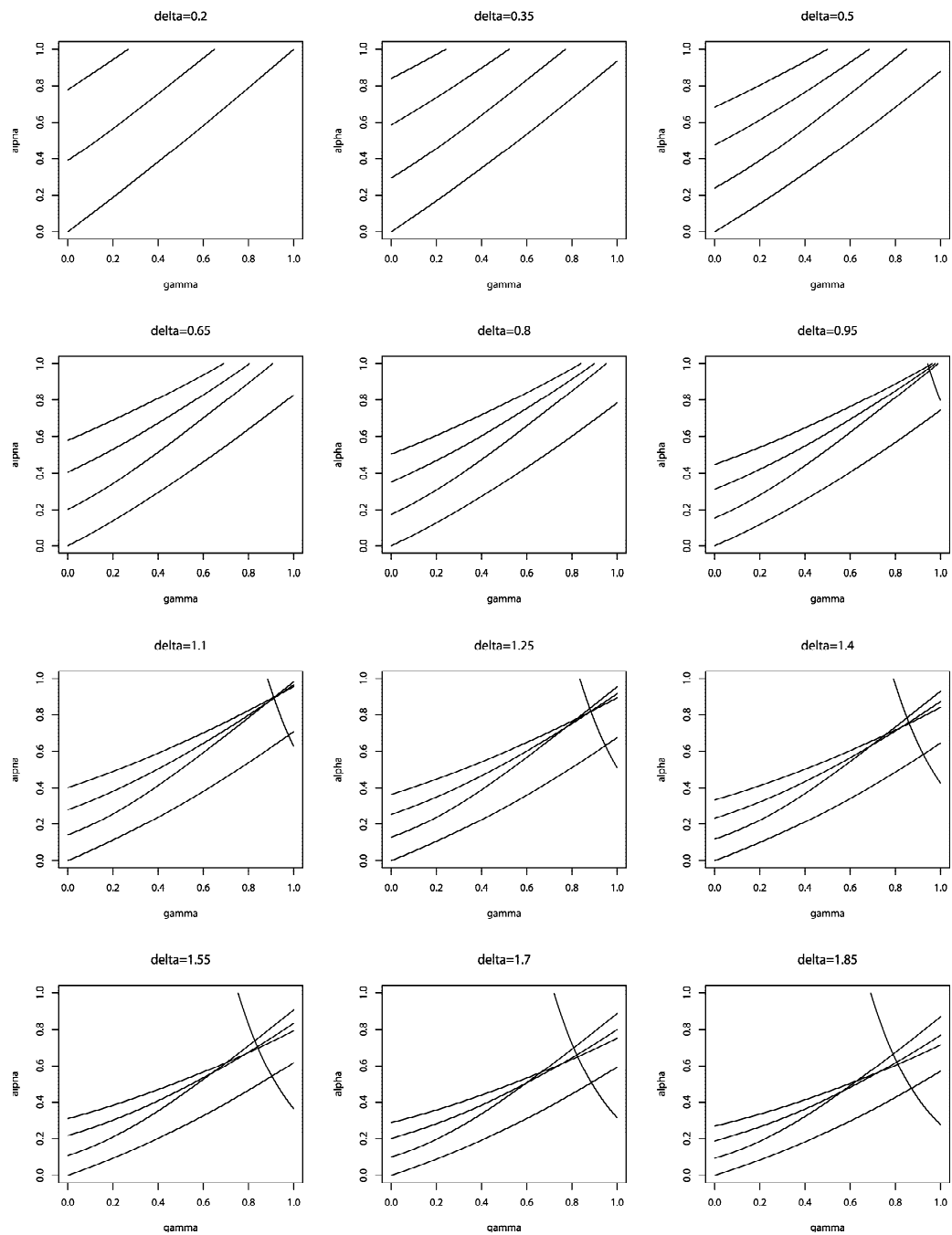


図7 ありそうにない利得に対する賭けと Allais の逆説 ((18) および (19) 式の場合)

右下がりの曲線の下の領域が (18) 式を満たす領域であり¹¹⁾、一番下の右上りの曲線が (19) 式を満たす領域である。

α , γ , δ の値がすべて高いとき以外は、Kahneman and Tversky (1979) による Allais の逆説のヴァリエーションが成立する領域は、「ありそうにない利得に対する賭け」が選択される領域と整合的である。

4.2.3 Battalio et al. (1990)

図 8 は、確率が 0.01, 0.1, 0.2 のときに「ありそうにない利得に対する賭け」が行なわれる場合 ((14) 式) と、(21) 式および (22) 式が成立する場合の γ と α の組み合わせを図示している。

一番下の右上りの曲線の上の領域が (22) 式を満たす領域であり、その上のより傾きが急な曲線の下の領域が (21) 式を満たす領域である。

δ の値が低いときには、「ありそうにない利得に対する賭け」と (21), (22) 式を同時に満たす γ と α の組み合わせは存在しない。しかし δ の値が高くなると、高い γ と α の組み合わせが「ありそうにない利得に対する賭け」と (21), (22) 式を同時に満たすようになっている。

5 おわりに

本論文では、Gonzalez and Wu (1999) によるウェイト関数にもとづき、リスク下の選択を説明するパラメータの組み合わせを検討した。

確率に対するウェイトの絶対水準をコントロールする δ の値が小さいときには、「ありそうにない利得に対する賭け」と Allais の逆説の両者と整合的な γ と α の組み合わせが存在する。一方 δ の値が大きいときには、「ありそうにない利得に対する賭け」と Battalio et al. (1990) と整合的な γ と α の組み合わせが存在する。しかしこの 3 つを同時に満たすパラメータの組み合わせはやはり存在しない。

なぜ関数を特定化したモデルはリスク下の選択と整合的でないのであろうか。表 3 は、表 2 の Gonzalez and Wu (1999) の実験の各被験者についてのパラメータの推定値をもとに作成したものである。V1 から V3 は、それぞれ確率が 0.01, 0.1, 0.2 のときの (14) 式、V4 は (16) 式、V5 は (17) 式、V6 は (18) 式、V7 は (19) 式、V8 は (20) 式、V9 は (21) 式、V10 は (22) 式に対応している。各式が成立するときには 1、成立しないときには 0 としている。

表 3 から分かることは、「ありそうにない利得に対する賭け」が、推定されたパラメータにもとづくモデルでは選択されないことである。

一方、表 4 は、Gonzalez and Wu (1999) による実験結果であり、 $(x, p; y, 1-p)$ というかたちの賭けに対する確実な等価物 (certainty equivalent) の中央値が示されている。確率 p が 0.1 以下のほとんどの場合には、確実な等価物は期待値を上回っており、確率 p が 0.25 のときも、確実な等価物は半数の賭けで期待値を上回っている。このことは「ありそうにない利得に対する賭け」が選択されていることを意味する。

11) δ が 0.2~0.8 のときには、グラフのすべての領域で (18) が成立する。したがって右下がりの曲線は図示されていない。

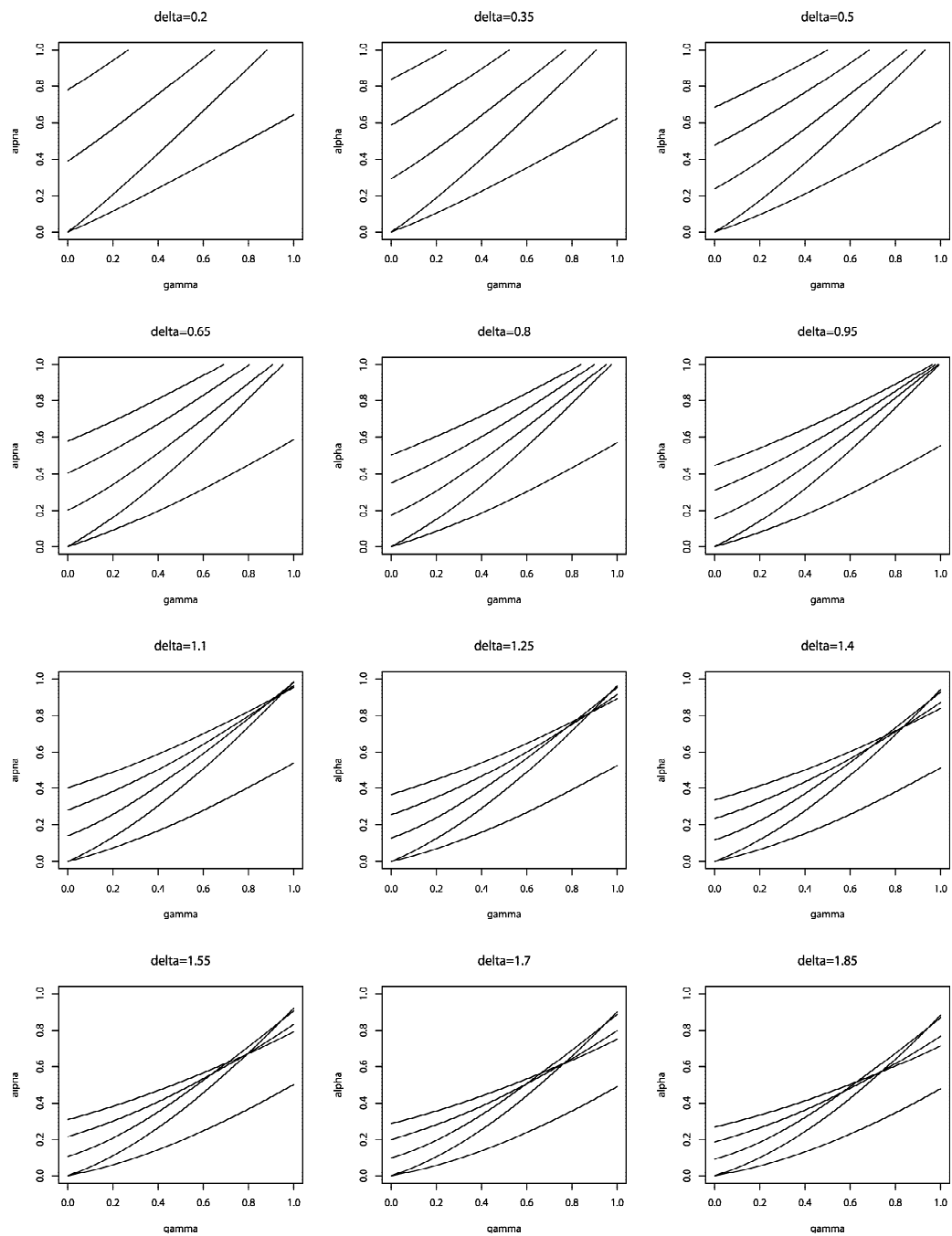


図8 ありそうにない利得に対する賭けと Battalio et al. (1990) による例

表3 推定されたパラメータにもとづく選択

被験者	V1	V2	V3	V4	V5	V6	V7	V8	V9	V10
1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1
2	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1
3	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1
4	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1
5	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1
6	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1
7	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1
8	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1
9	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1
10	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1
Median data	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1

表4 各賭けに対する確実な等価物の中央値 (Gonzalez and Wu (1999) より)

		0.01	0.05	0.1	0.25	0.4	0.5	0.6	0.75	0.9	0.95	0.99
25	0	4	4	8	9	10	9.5	12	11.5	14.5	13	19
50	0	6	7	12.5	12.5	10	14	12.5	19.5	22.5	27.5	40
75	0	5	10	14	14	17	16	18	23	36	31.5	48.5
100	0	10	10	21	21	19	23	35	31	63	58	84.5
150	0	10	10	25	25	34	25	49	70	41.5	106	118
200	0	6	9	26.5	26.5	34.5	34	56	48	80	102	158
400	0	18	24	55	54	64	58	58	115	208.5	249	277
800	0	9.5	42	90	90	91	89.5	207	197.5	404	448.5	519
50	25	28	29.5	32	32	34.5	34.5	37.5	36.5	38	41.5	41
75	50	56.5	58	59.5	59.5	62	63	64	64.5	64.5	65	68.5
100	50	58	59	62.5	62.5	66.5	70	78	82.5	80	78.5	89
150	50	57	58.5	79	79	89	84	92	99	121	106	117
150	100	114	110	116	116	121	125	125.5	131	133.5	130	142.5
200	100	111.5	115	123	123	131	135	144	146	149	171	158
200	150	156	165	166	166	171.5	170.5	176	177	187.5	179.5	190

実験で観察される「ありそうにない利得に対する賭け」が、なぜ同じデータにもとづく推定値をモデルにあてはめた場合には成立しないのか、このことが説明する理論が必要であろう。

参考文献

- Battalio, Raymond C. and Kagel, John K. and Jiranyakul (1990) "Testing Between Alternative Models of Choice under Uncertainty: Some Initial Results," *Journal of Risk and Uncertainty*, Vol. 3, pp. 25–50.
- Camerer, Colin F. and Tech-Hua Ho (1994) "Violations of the Betweenness Axiom and Nonlinearity in Probability," *Journal of Risk and Uncertainty*, Vol. 8, pp. 167–196.
- Camerer, Colin F. (1998) "Prospect Theory in the Wild: Evidence from the Field," Social Science Working Paper 1037, Division of the Humanities and Social Sciences, California Institute of Technology.
- Gonzalez, Richard and George Wu (1999) "On the Shape of the Probability Weighting Function," *Cognitive Psychology*, Vol. 38, pp. 129–166.
- Kahneman, Daniel and Amos Tversky (1979) "Prospect Theory: An Analysis of Decision under Risk," *Econometrica*, Vol. 47, No. 2, pp. 263–291.
- Neilson, William and Jill Stowe (2002) "A Further Examination of Cumulative Prospect Theory Parameterization," *The Journal of Risk and Uncertainty*, Vol. 24, No. 1, pp. 31–46.
- Prelec, Drazen (1998) "The Probability Weighting Function," *Econometrica*, Vol. 66, pp. 497–527.
- Quiggin, John (1982) "A Theory of Anticipated Utility," *Journal of Economic Behavior and Organization*, Vol. 3, pp. 323–343.
- Tversky, Amos and Daniel Kahneman (1992) "Advances in Prospect Theory: Cumulative Representation of Uncertainty," *Journal of Risk and Uncertainty*, Vol. 5, pp. 292–324.
- Wang, Mei and Paul S. Fischbeck (2004) "Incorporating Framing into Prospect Theory Modeling: A Mixture-Model Approach," *The Journal of Risk and Uncertainty*, Vol. 29, No. 2, pp. 181–197.
- Wu, George and Richard Gonzalez (1996) "Curvature of the Probability Weighting Function," *Management Science*, Vol. 42, pp. 1676–1690.