ニュー・ケインジアン型モデルにおける
自然利子率についての考察

鑓　田　　　亨

概要

ニュー・ケインジアン型のモデルでは、名目利子率と物価を含むかたちで消費者の動学的最適化の条件として Euler 方程式を導き、それを定常値のまわりで対数線型近似したIS 曲線から、景気中立的な（短期）自然利子率を定義している。本稿はその導出過程を検討するとともに、供給ショックと需要ショックのとり扱いの非整合性を指摘する。

1 はじめに

90 年代後半から日本経済は深刻な不況に苦しんだ。この不況の特徴は、中央銀行である日銀がゼロ金利政策に代表される積極的な金融政策を行なったにもかかわらず景気浮揚効果がなかなか見られなかったことである。Krugman（1998）は 2 期間からなる動学モデルにもとづき、この状況を流動性の罠として説明し、大きな議論を生んだ。

Krugman の主張の大きな前提は、消費者の動学的最適化行動と整合的な実質利子率が低下していることである。中央銀行は名目利子率をコントロールすることで短期の実質利子率を変化させることができる。しかし長期的には中央銀行の行動は物価の変動によって吸収され、長期的な実質利子率を変化させることはできない。長期的な実質利子率は生産性上昇率などによって決まると考えられる。そして Hayashi and Prescott（2002）などによって日本経済の生産性の低下が指摘されている。

物価を変動させないような実質利子率は自然利子率とも呼ばれる。自然利子率は通常、長期の実質利子率として考えられるが、Woodford（2003）に代表されるニューケインジアンの枠組みでは、経済に加わる短期的なショックに対して景気中立的な実質利子率として自然利子率を定式化されており、金融政策に関する重要な概念となっている。

ニュー・ケインジアン型のモデルでは、実質利子率、あるいは名目利子率と物価を含むかたちで消費者の動学的最適化の条件として Euler 方程式を導き、それを定常値のまわりで対数線型近似した IS 曲線から、景気中立的な（短期）自然利子率を定義している。本稿では 2 節でその導出過程について検討する。その上で結論としていくつかの疑問点を提示したい。

2 ニュー・ケインジアン型モデルにおける自然利子率

2.1 産出が外生的な場合

異時点間を通じての効用を最大化する代表的個人について考えることにする。消費は産出に

等しく、その経路は外生的に与えられていると仮定する。t 期における消費、物価、利子率をそれぞれ c_t, P_t, i_t で表わす。ただし t+1 期の変数は t 期におけるその変数の期待値を表わすものとする。異時点間を通じての効用最大化のための条件は、消費についての Euler 方程式

$$\frac{u'(c_t)}{P_t} = \frac{u'(c_{t+1})}{P_{t+1}}\frac{1+i_t}{1+\rho} \tag{1}$$

によって与えられる。u は時点効用関数であり、u' は限界効用を表わす。また ρ は主観的割引率である。通常は物価･利子率などが与えられた場合に、予算制約および（1）式を満たすように消費の経路が決定されると考えるが、この場合には消費の経路が外生的に与えられているため、（1）式が満たされるように物価・利子率が決まると考える。

（1）式より t 期の限界効用は

$$\begin{aligned} u'(c_t) &= u'(c_0)\left(\frac{1+\rho}{1+i_t}\frac{P_{t+1}}{P_t}\right)^t \\ &= u'(c_0)\exp\left[t\ln\frac{(1+\pi_{t+1})(1+\rho)}{1+i_t}\right] \end{aligned} \tag{2}$$

と表わすことができる。ただし π_{t+1} は t 期の物価上昇率である。

$$\pi_{t+1} = \frac{P_{t+1}-P_t}{P_t}$$

時間の変化が連続的であると考えて、（2）式の両辺を時間 t で微分すると次式を得る [*1]。

$$u''(c_t)\frac{dc_t}{dt} = u'(c_t)(\pi_{t+1}+\rho-i_t) \tag{3}$$

異時点間の代替の弾力性 σ は

$$\sigma = -\frac{u'(c_t)}{u''(c_t)c_t}$$

と定義される。また t 期における消費の変化率を表わす $\frac{dc_t/dt}{c_t}$ を

$$\frac{dc_t/dt}{c_t} = \ln c_{t+1} - \ln c_t$$

で近似する。これらを用いて（3）式を整理すると

$$i_t - \pi_{t+1} = \sigma^{-1}(\ln c_{t+1} - \ln c_t) + \rho \tag{4}$$

を得ることができる [*2]。（4）式の左辺は実質利子率である。ここで自然利子率 r_t^n を

$$r_t^n = \sigma^{-1}(\ln c_{t+1} - \ln c_t) + \rho \tag{5}$$

と定義する。外生的に消費（= 産出）の経路が与えられており、かつこの経路の下での自然利子率が現実の実質利子率に一致するとき、外生的に与えられている消費の経路が異時点間の効用最大化のための条件である (1) 式を満たす。逆に現実の実質利子率が自然利子率と一致しない場合には、現実の消費経路が（1）式を満たすために、外生的に与えられている消費経路から

*1　x の値が十分にゼロに近い場合に $\ln(1+x) = x$ と近似できることを用いた。

*2　相対的危険回避度一定の時点効用関数の限界効用は $c_t^{-1/\sigma}$ となる。ただし σ は異時点間の代替の弾力性である。したがって相対的危険回避度一定の時点効用関数を仮定した場合には、$u'(c_t) = c_t^{-1/\sigma}$ を（1）式に代入し、両辺について対数をとることにより（4）と同等の式が得られる。

乖離しなければならない。例えば現実の実質利子率が自然利子率よりも高い場合には、(4) 式の右辺が大きくならなければならない。これは今期の消費(= 産出)を潜在的に実現可能な水準よりも減少させることによって可能となる。

(5) 式の中の$\ln c_{t+1} - \ln c_t$の項は消費の変化率を意味した。したがって消費と産出が等しいと仮定したこのモデルでは、経済成長率が高いほど、自然利子率は高くなる。

2.2 供給へのショックが存在する場合

次に供給に対して外生的なショックが存在する場合を考える[*3]。この場合にも、外生的なショックが存在しない場合において導出された (4) 式は成立するものとする。

外生的なショックがない場合の消費(= 供給)の経路を$\bar{c}_t$で表わすことにする。また実際の消費の$\bar{c}_t$からの乖離率として$\hat{c}_t$を定義する。

$$\hat{c}_t = \ln c_t - \ln \bar{c}_t$$

したがって$\ln c_t = \hat{c}_t + \ln \bar{c}_t$である。これを (4) 式に代入し、整理すると次式を得る。

$$\hat{c}_t = \hat{c}_{t+1} + (\ln \bar{c}_{t+1} - \ln \bar{c}_t) - \sigma(i_t - \pi_{t+1} - \rho) \tag{6}$$

この場合、自然利子率は

$$r_t^n = \sigma^{-1}(\ln \bar{c}_{t+1} - \ln \bar{c}_t) + \rho \tag{7}$$

と定義される。$\ln \bar{c}_{t+1} - \ln \bar{c}_t$は外生的なショックが存在しない場合の潜在的な成長率と解釈できる。(7) 式で定義された自然利子率を (6) 式に代入すると

$$\hat{c}_t = \hat{c}_{t+1} - \sigma(i_t - \pi_{t+1} - r_t^n) \tag{8}$$

を得る。現実の利子率が自然利子率に等しいとき、今期と来期の消費の定常値からの乖離率が等しくなる。逆に言えば、今期と来期の消費の定常値からの乖離率が等しくなるような実質利子率がニュー・ケインジアン型モデルにおける自然利子率だと考えることができる。

(8) 式をフォーワード・ルッキングに解くと次式を得る。

$$\hat{c}_t = \hat{c}_\infty + \sum_{j=0}^{\infty}(i_{t+j} - \pi_{t+1+j} - r_{t+j}^n) \tag{9}$$

つまり現在から将来にわたる実質利子率と自然利子率の差の期待値の合計が今期の消費の$\bar{c}_t$からの乖離率に影響を与える。例えば$\sum_{j=0}^{\infty}(i_t - \pi_{t+1} - r_t^n)$が正であれば$\hat{c}_t$は負となる。

2.3 需要に対するショックが存在する場合

次に需要面についても外生的なショックが存在する場合の自然利子率について考察する。モデルの基本的な枠組みは前と同じであるが、効用関数のなかに家計の選好などに対する外生的なショックを表わす変数ξ_tを取り入れることにする。

*3　ここでの外生的なショックは各期にランダムに発生するものではなく、特定の確率過程にしたがうものであり、したがって消費者は来期の供給を正確に予測できると想定されているものと考えられる。

異時点間を通じての効用最大化のための条件は

$$\frac{u_1(c_t,\xi_t)}{P_t}=\frac{u_1(c_{t+1},\xi_{t+1})}{P_{t+1}}\frac{1+i_t}{1+\rho} \tag{10}$$

となる。ただし u_1 は第 1 変数（消費）についての時点効用関数の偏微分を表わす。また t +1 期の変数は t 期における期待値を表わすものとする。

2.1 節と同様に

$$u_1(c_t,\xi_t)=u_1(c_0,\xi_0)\exp\left[t\ln\frac{(1+\pi_{t+1})(1+\rho)}{1+i_t}\right] \tag{11}$$

である。しかし外生的なショックを表わす変数を効用関数に含めた場合には、時間の変化が連続的であると考えて（11）式の両辺を時間 t で微分したものは、

$$u_{11}\frac{dc_t}{dt}+u_{12}\frac{d\xi_t}{dt}=u_1(c_t,\xi_t)(\pi_{t+1}+\rho-i_t) \tag{12}$$

となり、左辺に新たな項が加わる。

ここでまた時間は離散的だと考え

$$\frac{dc_t/dt}{c_t}=\ln c_{t+1}-\ln c_t,\quad \frac{d\xi_t/dt}{\xi_t}=\ln\xi_{t+1}-\ln\xi_t$$

と近似する。さらに異時点間の代替の弾力性を σ とすると（12）式は

$$\ln c_{t+1}-\ln c_t+\frac{u_{12}\xi_t}{u_{11}c_t}(\ln\xi_{t+1}-\ln\xi_t)=\sigma(i_t-\pi_{t+1}-\rho) \tag{13}$$

と変形できる。ここで外生的なショックを表わす変数として

$$g_{t+1}-g_t=-\frac{u_{12}\xi_t}{u_{11}c_t}(\ln\xi_{t+1}-\ln\xi_t) \tag{14}$$

を新たに定義する。これを用いると（13） 式は

$$(\ln c_{t+1}-\ln c_t)-(g_{t+1}-g_t)=\sigma(i_t-\pi_{t+1}-\rho) \tag{15}$$

と変形できる [*4]。

外生的な需要ショックを意味する g_t の経路が与えられており、それにともない最適な c_t の経路が得られているとする。(15) 式を変形すると

$$i_t-\pi_{t+1}=\sigma^{-1}(\ln c_{t+1}-\ln c_t)-\sigma^{-1}(g_{t+1}-g_t)+\rho \tag{16}$$

を得る。これを（5） 式と比較すると、最適な c_t の経路を実現するために必要な実質利子率は、外生的な需要ショックの無い場合よりも $\sigma^{-1}(g_{t+1}-g_t)$ だけ低くなければならない。

2.2 節と同様に、$\ln c_t=\hat{c}_t+\ln\bar{c}_t$ を用いて（15）式を変形する。

$$\hat{c}_t=\hat{c}_{t+1}+(\ln\bar{c}_{t+1}-\ln\bar{c}_t)-(g_{t+1}-g_t)-\sigma(i_t-\pi_{t+1}-\rho) \tag{17}$$

---

*4　ξ_t が複数の変数 $\xi_{1,t},\ldots,\xi_{n,t}$ からなるベクトルであるとした場合には、

$$g_{t+1}-g_t=-\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{\partial u_1}{\partial\xi_{k,t}}\xi_{k,t}}{u_{11}c_t}(\ln\xi_{k,t+1}-\ln\xi_{k,t})$$

となる。

この場合、自然利子率は

$$r_t^n = \sigma^{-1}[(\ln \bar{c}_{t+1} - \ln \bar{c}_t) - (g_{t+1} - g_t)] + \rho \tag{18}$$

と定義される。自然利子率は外生的な需要ショックがない場合にくらべて $g_{t+1} - g_t$ だけ低くなる。(18) 式の自然利子率の定義を用いれば (17) 式は

$$\hat{c}_t = \hat{c}_{t+1} - \sigma(i_t - \pi_{t+1} - r_t^n) \tag{19}$$

となり、現実の実質利子率 $i_t - \pi_{t+1}$ が自然利子率 r_t^n に等しいときに $\hat{c}_t$ が $\hat{c}_{t+1}$ と等しくなる。

(19) 式をフォーワード・ルッキングに解くと (9) 式と同じものが得られる。つまり、現在から将来にわたる現実の実質利子率と自然利子率の差の期待値の合計が今期の消費の $\bar{c}_t$ からの乖離率に影響を与えるという結果は、需要ショックを考えない場合と同じである。

供給や需要に対する外生的なショックがないと仮定した 2.1 節では

$$\ln \bar{c}_{t+1} - \ln \bar{c}_t = \sigma(\bar{i}_t - \bar{\pi}_{t+1} - \rho) \tag{20}$$

$$\bar{r}_t^n = \sigma^{-1}(\ln \bar{c}_{t+1} - \ln \bar{c}_t) + \rho \tag{21}$$

となった。ただし外生的なショックが存在しない場合の値を示すため、各変数にバーをつけて表わしている。(15) 式から (20) を引くと

$$\hat{c}_t = \hat{c}_{t+1} - (g_{t+1} - g_t) - \sigma(\hat{i}_t - \hat{\pi}_{t+1}) \tag{22}$$

を得る。ただし

$$\hat{i}_t = i_t - \bar{i}_t \simeq \frac{\ln(1+i_t)}{\ln(1+\bar{i}_t)}, \quad \hat{\pi}_{t+1} = \pi_{t+1} - \bar{\pi}_{t+1} \simeq \frac{\ln(1+\pi_{t+1})}{\ln(1+\bar{\pi}_{t+1})}$$

と定義している。また (18) 式から (21) 式を引くと

$$\hat{r}_t^n = -\sigma^{-1}(g_{t+1} - g_t) \tag{23}$$

を得る。ただし

$$\hat{r}_t = r_t^n - \bar{r}_t^n \simeq \frac{\ln(1+r_t^n)}{\ln(1+\bar{r}_t^n)}$$

と定義している。(23) 式を (22) 式に代入すると

$$\hat{c}_t = \hat{c}_{t+i} - \sigma(\hat{i}_t - \hat{\pi}_{t+1} - \hat{r}_t^n) \tag{24}$$

を最終的に得る。つまり現実の実質利子率の定常値からの差が自然利子率の定常値からの差と等しいときに $\hat{c}_t$ が $\hat{c}_{t+1}$ と等しくなると考えることもできる。

3 結論

2.1 節においては外生的なショックがない場合の自然利子率を求めた。実質利子率、あるいは名目利子率と物価を含むかたちで消費者の動学的最適化の条件として Euler 方程式を導き、そこから均衡利子率を求める方法は、ニュー・ケインジアン型のモデルに限らず、Krugman（1998）にも共通する方法である。

2.2 節では、単純化のために消費（= 産出）の定常値からの乖離を供給ショックとして考えた。実際には産出は供給ショックだけではなく、需要ショックによっても影響を受けると考えられるし、Woodford（2003）においても、そのようにモデルがつくられている。

しかし 2.3 節で求めた自然利子率には、需要ショックを表わす変数は含まれるが、供給ショックについての変数は含まれていない。中央銀行が需要ショックを供給ショックよりも容易に判断できるかどうかは疑問である。供給ショックと需要ショックの両方を含めずに自然利子率を定義した場合、

$$r_t^n = \sigma^{-1}(\ln \bar{c}_{t+1} - \ln \bar{c}_t) + \rho$$

となる。逆に供給ショックと需要ショックの両方を含めた場合、自然利子率は（16）式の右辺に等しくなる。

中央銀行が金融政策運営のための参考情報として供給ショックを含まないかたちでの自然利子率を考えるのは、来期の産出 c_{t+1} を正確にとらえることが困難だからであるとしよう。その場合、消費者にとっても c_{t+1} を正確にとらえることは困難になるはずである。消費者が $\bar{c}_{t+1}$ にもとづいて消費を決定する場合には、(8) 式および（19）から $\hat{c}_{t+1}$ の項は消える。今期の消費の定常値からの乖離率は、今期の現実の実質利子率と自然利子率の差によってのみ決定され、将来の現実の実質利子率と自然利子率の差とは無関係になる。

参考文献

Blanchard, Oliver Jean and Stanley Fischer (1989) *Lectures on Macroeconomics,* Cambridge MA: MIT Press.

Hayashi, Fumio and Edward C. Prescott (2002) “The 1990s in Japan: A Lost Decade”, *Review of Economic Dynamics,* Vol. 5, No. 1, pp. 206-235.

Krugman, Paul R. (1998) “It's Baaack: Japan's Slump and the Return of the Liquidity Trap”, *Brokings Papers on Economic Activity, 2,* pp. 137-205.

Woodford, Michael (2003) *Interest and Prices: Foundations of a Theory of Monetary Policy,* Princeton: Princeton University Press.

岩本康志（2004）「デフレの罠」脱却のための金融財政政策のシナリオ」,『金融研究』, 第 23 巻, 第 3 号, 1-47 頁、10 月.

小田信之・村永淳（2003）「自然利子率について：理論整理と計測」、日本銀行ワーキングペーパーシリーズ。No.03-J-5.

渡辺努・岩村充（2004）『新しい物価理論』、岩波書店.