

Quantile Regression とヒストリカル法を用いた Value-at-Risk 推定の精度比較

山 分 俊 幸

1 はじめに

企業経営では、投資に伴うリスクの管理が最も重要な問題である。マルコビッツのポートフォリオ選択論が世に出るまでは、投資は収益率をいかに大きくするかのみが目が向けられていた。しかし、このポートフォリオ選択論以後、投資に伴うリスクを管理する必要があるという認識が徐々に広まっていった。その一方で、金融市場のグローバル化、デリバティブ市場の発展などによって、特に近年、ポートフォリオの持つリスクが複雑化し、その管理が難しくなっている。そして 1990 年代後半には、リスク管理の不徹底による巨額損失事件が発生した。現在では、これら巨額損失事件を教訓として、リスク管理が極度に重要視されるようになってきている。

リスク管理を迅速に経営に生かすためには、できるだけ解り易い形でリスクの大きさと変化を表現するほうが良い。現在、市場リスク管理に Value-at-Risk (VaR) が幅広く用いられている。VaR は、リスクの大きさを一括して解り易く表現する指標である。

VaR とは、ある一定の確率範囲内で起こりうるポートフォリオの最大損失額である。 $\{r_t\}_{t=1}^T$ をポートフォリオのリターンの時系列データとし、 T をデータが存在する期間、 Ω_t を時点 t で利用可能な情報とすると、時点 t における $100(1-\theta)\%$ VaR は以下の式を満たす値である。

$$\Pr[r_t < -VaR_t | \Omega_t] = \theta \quad \theta \in (0, 1). \quad (1)$$

金融機関では、取り扱いの簡便さから、VaR の推定に分散共分散法とヒストリカル法が広く用いられてきた。分散共分散法最大の特徴は、収益率の正規分布性を仮定している点にある。この仮定を置くことで、分散共分散法を用いた VaR の推定が非常に簡単になっている。しかし、収益率の従う確率分布は、一般に正規分布より分布の裾が厚い。そのため、分散共分散法を用いた VaR の推定では、99% VaR でリスクを過小評価するが多い。また、非線形リスクを持つオプションのリスク管理には使えない問題点もある。一方、ヒストリカル法を用いた VaR の推定は、収益率の分布を仮定しないので、非線形リスクを持つオプションのリスク管理や非正規性の分布を持つ収益率のリスク管理にも使える。ヒストリカル法を用いた VaR の推定は、単純に全てのデータを用いて標本分位点を計算するので、計算としては非常に簡単である。

現在、多くの金融機関では、VaR の推定方法を分散共分散法からヒストリカル法に移行させてきている。その理由は、バックテストと呼ばれる VaR の推定精度評価において、ヒストリカル法の結果が分散共分散法の結果に比べて勝っているからである。しかし、バックテストにおける 99% VaR の理想値 1%, 95% VaR の理想値 5% に対して、ヒストリカル法を用いて推定した VaR であっても未だ十分な乖離がある。本論文の目的は、金融機関で用いられている分散共分散法、ヒストリカル法と比較して、さらに良い精度を示す VaR の推定方法を提示することにある。

本論文で紹介する VaR 推定手法は, Quantile Regression (以下 QR) である. QR は, 被説明変数の分位点を説明変数で回帰する手法で, Koenker and Bassett(1978) によって提唱され, 統計分野において用いられるノンパラメトリック推定 (分布を仮定しない推定) 手法の一つである. QR を用いた VaR の推定は, VaR の概念が一般化するとともに研究され始めた. Chernozhukov and Umantsev(2001) では, Occidental Petroleum 株の VaR を, 1 日前の石油現物価格のリターン, 1 日前の Dow Jones Industrials のリターン, 1 日前の Occidental Petroleum 株のリターンを説明変数とした線形 QR によって求めている. 推定結果の考察では, 定数項以外のパラメータが 0 であるという帰無仮説に対して Wald 検定を行うことで, ヒストリカル法を用いて推定した VaR と, QR を用いて推定した VaR が統計的に異なることを示している. しかし, バックテストは行わず, 推定された VaR のパフォーマンスについては言及していない. Wu & Xiao[2002] では, S&P500 Index のラグ付き日次リターンのみを説明変数とした線形 QR によって, S&P500 Index の日次リターンの VaR を推定している. また, Left tail measures として, VaR だけでなく

conditional mean of losses larger than the $100\theta\%$ level VAR(MLL)

$$-E[r_t | r_t \leq -VAR_t(\theta); \Omega_t]$$

standard deviation of losses larger than the $100\theta\%$ level VAR(SDLL)

$$\sqrt{E\left\{\left[r_t - E(r_t | r_t \leq -VAR_t(\theta); \Omega_t)\right]^2 | r_t \leq -VAR_t(\theta); \Omega_t\right\}}$$

も推定している. 考察では, S&P500 Index の日次リターンが, 正規分布, Garch 過程, Garch-jump 過程, regime-switching 過程

に従うと仮定してシミュレーションを行い, 5%VaR, 5%MLL, 5%MLL+5%SDLL それぞれを用いたリスクマネジメントのパフォーマンスを比較している. しかし, VaR の推定で一般的に最もよく用いられているパフォーマンス評価方法であるバックテストは行っていない. Engle and Manganelli(2004) では, 1 日のラグ付き VaR の推定値, 1 日のラグ付きリターンを説明変数とした VaR の自己回帰モデルに対して非線形 QR を用いることで, GM, IBM, S&P500 Index の日次リターンの VaR を推定している. 推定結果の考察では, 自ら開発した検定によって, 推定された VaR のパフォーマンス評価を行っているものの, バックテストによる評価は行っていない.

QR によって, VaR は, β を p 次元のパラメータとし, $\mathbf{x}_t$ で表される p 次元の説明変数を用いて, $VAR_t = \mathbf{x}_t' \beta$ と表される. QR による VaR の推定では, $f(y|x)$ を y の条件付密度関数としたとき $(1-\theta)\%$ VaR について以下の式が成り立つ.

$$\theta = \int_{-\infty}^{\mathbf{x}'\beta} f(\lambda|\mathbf{x})d\lambda \quad (2)$$

投資においては, 色々な指標が利用されている. 例えば, 株式投資においては, 前日のダウのリターンや, 過去のボラティリティなどが有用な指標とされている. 投資家は, 指標の値や値の変化から有用な情報を引き出し, その情報をもとに投資を決定する. そして, 投資の結果, 将来のリターン, さらに VaR の値が変化する. そのため, 指標に含まれる有益な情報を

VaR の推定に利用することができれば、リターンデータのみを用いる場合に比べて、VaR の推定精度も上昇すると考えられる。分散共分散法、ヒストリカル法が VaR の推定に過去のリターンデータのみを用いるのに対して、QR による VaR の推定では、(2) 式で示されているように、過去のリターンデータだけでなく、様々なデータを用いることができる。よって、用いるデータをうまく選択することによって、QR による VaR の推定は、分散共分散法、ヒストリカル法による VaR の推定に比べて、精度の良いものにすることができると考えられる。また、QR では、ヒストリカル法と同様に、リターンの分布を仮定しないことから、分散共分散法の問題点を回避できるという特徴もある。

本論文の目的は、以上のような特徴のある QR を用いることで、金融機関で用いられているヒストリカル法と比較して良い精度を示す VaR 推定手法を提示することにある。前記既存研究と比較した本論文の特徴として、まず実際に金融機関で用いられているヒストリカル法との推定精度比較を行っている点が挙げられる。そして、比較を行えるようにするため、QR による VaR の推定においてバックテストで推定精度評価を行っている点も挙げられる。

本論文では、以上のような特徴のある QR を用いて、TOPIX の VaR を推定し、得られた VaR の精度をヒストリカル法を用いた VaR の推定の精度と比較している。この結果、QR は、99%VaR と 95%VaR の結果を総合して評価すると、ヒストリカル法よりも精度の良い VaR 推定方法であることがわかった。

本論文の構成は以下の通りである。まず第2節で本論文が用いる VaR の推定手法の説明をし、第3章では、推定に用いるデータの分析を行う。第4節では、VaR の推定結果とその考察を行い、第5章で結論と今後の課題を述べている。

2 Estimation Methods

2.1 ヒストリカル法

ヒストリカル法では、以下のモデルによって、サンプルデータ $r_1, \dots, r_T$ が生成されるとすることができる。

$$r_t = \alpha_\theta + \varepsilon_{\theta t} \quad \text{Quant}_\theta(\varepsilon_{\theta t}) = 0. \quad (3)$$

そして、以下の式の解が r_t の θ 分位点となる。

$$\min_{\alpha \in \mathcal{R}} \left\{ \sum_{t \in \{t: r_t \geq \alpha\}} \theta |r_t - \alpha| + \sum_{t \in \{t: r_t < \alpha\}} (1 - \theta) |r_t - \alpha| \right\}. \quad (4)$$

(3) 式、(4) 式からわかるように、ヒストリカル法では、分布を特定せず、直接分位点を求めるところに特徴がある。

2.2 QR

Koenker and Bassett(1978) は、(4) 式を回帰モデルに拡張することで、QR を開発した。QR では、以下のモデルによって、サンプルデータ $r_1, \dots, r_T$ が生成されるとする。

$$r_t = \mathbf{x}_t' \beta + \varepsilon_{\theta t} \quad \text{Quant}_\theta(\varepsilon_{\theta t} | \mathbf{x}_t) = 0. \quad (5)$$

ここで $\mathbf{x}_t$ を p 次元の説明変数, $\text{Quant}_\theta(\varepsilon_{\theta t}|\mathbf{x}_t)$ を条件 $\mathbf{x}_t$ が与えられたもとの $\varepsilon_{\theta t}$ の θ 分位点とする. Koenker and Bassett(1978) は, r_t の θ 分位点が, (4) 式を拡張した以下の式の解である $\mathbf{x}_t'\beta$ となることを示した.¹

$$\begin{aligned} & \min_{\beta \in \mathbb{R}^p} \frac{1}{T} \left\{ \sum_{t \in \{t: r_t \geq \mathbf{x}_t'\beta\}} \theta |r_t - \mathbf{x}_t'\beta| + \sum_{t \in \{t: r_t < \mathbf{x}_t'\beta\}} (1 - \theta) |r_t - \mathbf{x}_t'\beta| \right\} \\ &= \min_{\beta \in \mathbb{R}^p} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T [\theta - I(r_t < \mathbf{x}_t'\beta)] [r_t - \mathbf{x}_t'\beta]. \end{aligned} \quad (6)$$

ここで $I(\cdot)$ は定義関数を表す.

(5) 式, (6) 式からわかるように, QR では, ヒストリカル法と同様に, 分布を特定せず, 直接分位点を求めるところに特徴がある. また, (3), (5) 式からわかるように, ヒストリカル法と異なり, 条件 $\mathbf{x}_t$ が与えられたもとの θ 分位点を求めるところに特徴がある.

本論文が VaR の推定に用いる手法は, Koenker and Bassett(1978) が開発し, Chernozhukov and Umantsev(2001) が VaR の推定に用いた, 以上の線形 QR である. Engle and Manganelli (2004) が VaR の推定に用いた非線形 QR は, パラメータ推定に時間がかかり, VaR 推定の精度を検証するためのバックテストが行えないので, 本論文では用いないこととする.

3 データ

本論文では, ヒストリカル法, QR を用いた VaR の推定の為に, 1996 年 11 月 29 日から 2007 年 1 月 29 日までの TOPIX の日次リターンデータを, QR の説明変数とするために, ダウの日次リターンデータを用いる. 以下の表は, 用いるリターンデータ全体の統計量を表している. データ全体では, 尖度が全ての収益率データで正規分布の 3 を超えており, 分布の裾の厚いこと (ファットテイル) が確認できる.

表 1: データの統計量

	TOPIX	ダウ
平均	0.0040	0.0261
標準偏差	1.2719	1.1100
最大	6.5993	6.1547
最小	-6.5736	-7.4549
歪度	-0.1381	-0.0822

* データは全て % 表記に変換したものをを用いている

4 推定結果と考察

第 1 節で述べたとおり, QR では, 色々な指標を VaR の推定に取り込むことができる. 本論文では, それぞれ 1 日のラグ付きの TOPIX リターン, ダウリターン, ならびに TOPIX リター

¹ 証明は APPENDIX

ンの 20 日ヒストリカルボラティリティー²を用いて、QR によりポートフォリオの 99%VaR, 95%VaR を推定する。上記 3 つの指標を用いる理由は、TOPIX の将来を予測する上で、これらの指標が投資家にとって特に重要視されているからである。また、ヒストリカル法による 99%VaR, 95%VaR の推定も行う。そして、それぞれの VaR 推定法の精度についてバックテストという方法で比較する。

バックテストとは、あるバックテスト期間に含まれるそれぞれの日のリターンが、その日以前のデータを用いて推定された VaR を超過するかどうかを調査し、超過比率が 99%VaR の理想値 1%, 95%VaR の理想値 5% からどれだけ乖離しているかをみることで、VaR の推定精度を評価する方法である。本論文では、QR, ヒストリカル法で 1000 日のバックテスト期間をそれぞれ一致させてバックテストを行っている。そして、QR を用いた VaR の推定では、最初の 20 日分を TOPIX の 20 日ヒストリカルボラティリティーの計算のみに用い、過去 770 日分のデータから次の日の VaR を推定している。そしてヒストリカル法では、過去 1000 日分のデータから次の日の VaR を推定している。VaR の推定に用いる過去のデータ数については、ヒストリカル法では、金融機関でよく用いられる値を使い、QR では、データ数を様々に変更してバックテストを行い、結果が良いものを選択した。

さらに本論文では、1 回目のバックテスト期間を 2000 年 12 月 22 日から 2005 年 1 月 19 日までの 1000 営業日とし、2 回目のバックテスト期間を 2000 年 12 月 25 日から 2005 年 1 月 20 日までの 1000 営業日とするように、バックテスト期間を一営業日ずつずらし、500 回のバックテストを行っている。

図 1 は、この 500 回のバックテストから得られる 99%VaR の超過比率と理想値 1% との乖離の大きさの推移を表している。また図 2 では、95%VaR について超過比率と理想値 5% との乖離の大きさの推移を表している。図 1 によると、QR を用いて推定した VaR は、ヒストリカル法を用いて推定した VaR と比較して、全てのバックテストで同等以上の推定精度を示していることがわかる。また、図 2 によると、QR を用いて推定した VaR は、ヒストリカル法を用いて推定した VaR と比較して、全てのバックテストで推定精度が勝っていることがわかる。

表 2 は、バックテストから得られる VaR の超過比率と理想値との乖離の大きさの平均値を示している。表 2 によると、QR を用いて推定した VaR の推定精度は、ヒストリカル法を用いて推定した VaR の推定精度と比較してはるかに良いことがわかる。

² 過去 20 日分の TOPIX リターンから計算したヒストリカルボラティリティー

図 1：99%VaR の超過比率と理想値 1% との乖離の大きさの推移

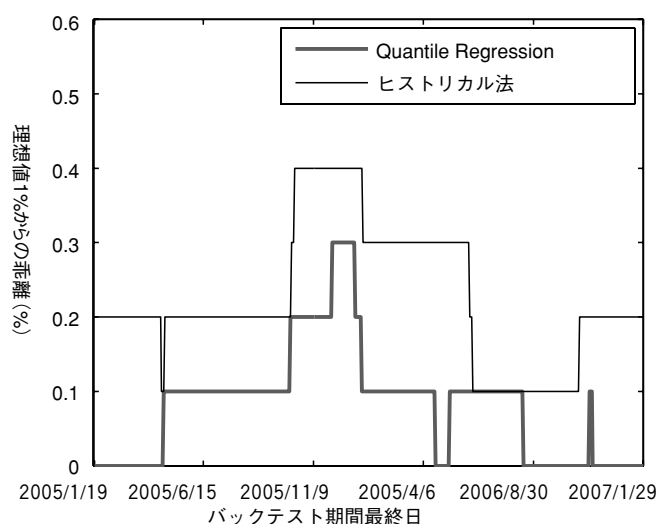


図 2：95%VaR の超過比率と理想値 5% との乖離の大きさの推移

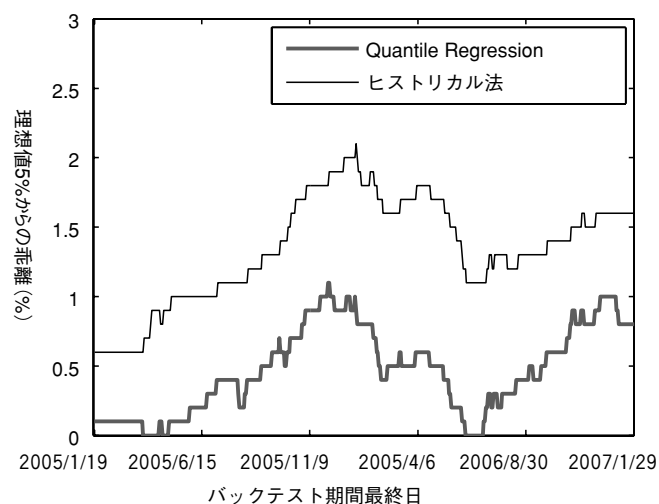


表 2: VaR の超過比率と理想値との乖離の大きさの平均値

	99%VaR(%)	95%VaR(%)
Quantile Regression	0.0806	0.4698
ヒストリカル法	0.2248	1.3416

5 結論

本論文では、市場リスク評価に広く用いられている VaR を推定する手法として、QR を紹介した。ヒストリカル法が VaR の推定に過去のリターンデータのみを用いるのに対して、QR は、VaR の推定に過去のリターンデータだけでなく、様々なデータを用いることができることに

特徴がある。この QR を用いて、本論文では TOPIX の VaR を推定し、得られた VaR の推定精度をヒストリカル法を用いた VaR の推定精度と比較した。結果として、QR は、99%VaR と 95%VaR どちらにおいても、ヒストリカル法よりも精度の良い VaR 推定方法であることがわかった。

本論文では、1 日のラグ付きの TOPIX リターン, ダウリターン, ならびに TOPIX リターンの 20 日ヒストリカルボラティリティーによって QR を用いた VaR を推定した。得られた結果はヒストリカル法に比べて良いものであったが、投資家に用いられている指標を全てを試してはいないため、QR による VaR の推定に用いるデータの選択には、未だ研究の余地がある。そのため、もっと大掛かりなモデル構築も視野に入れて、今後さらに研究を深めていきたいと思う。

参考文献

Chernozhukov, V. and L. Umantsev, "Conditional value-at-risk : Aspects of modeling and estimation", *Empirical Economics*, 26 2001, pp.271-292.

Engle, R.F. and S. Manganelli, "CAViaR : Conditional Autoregressive Value at Risk by Regression Quantiles", *Journal of Business & Economic Statistics*, October 2004, pp.367-381. \[3mm]

Koenker, R. and G. Bassett, "Regression quantiles", *Econometrica*, 46 1978, pp.33-50. \[3mm]

Wu, G. and Z. Xiao, "An analysis of risk measures", *Journal of Risk*, Summer 2002, pp.53-75.

APPENDIX

$$L(y, \mathbf{x}) = \begin{cases} \theta |y - \mathbf{x}'\beta| & y \geq \mathbf{x}'\beta \\ (1 - \theta) |y - \mathbf{x}'\beta| & y < \mathbf{x}'\beta \end{cases} \quad (7)$$

とし、 $g(y|\mathbf{x})$ を y の条件付密度関数としたとき

$$\min_{\beta} E[L(y, \mathbf{x})|\mathbf{x}]$$

の解 β^0 が

$$\theta = \int_{-\infty}^{\mathbf{x}'\beta^0} g(\lambda|\mathbf{x}) d\lambda$$

を満たすものであることを示す

(証明)

$$E[L(y, \mathbf{x})|\mathbf{x}] = \int_{\mathbf{x}'\beta}^{\infty} \theta (y - \mathbf{x}'\beta) g(\lambda|\mathbf{x}) d\lambda - \int_{-\infty}^{\mathbf{x}'\beta} (1 - \theta) (y - \mathbf{x}'\beta) g(\lambda|\mathbf{x}) d\lambda$$

と表せるので、上記の式を β の要素 β_i で微分してそれが 0 であるとする

$$0 = x_i \left\{ \theta - \int_{-\infty}^{\mathbf{x}'\beta^0} g(\lambda|\mathbf{x}) d\lambda \right\}$$

となる