リスクファクターの直近の変動を考慮した Value-at-Risk 推定

山 分 俊 幸

1　はじめに

現在、金融機関の市場リスク管理には、Value-at-Risk（以下 VaR）というリスク指標が幅広く用いられている。VaR とは、ある一定の確率範囲内で起こりうるポートフォリオの最大損失額である。$\{r_t\}_{t=1}^{T}$ をリスクファクターの時系列データとし、T をデータが存在する期間、Ω_t を時点 t で利用可能な情報とすると、時点 t における 100（1 － θ）%VaR は以下の式を満たす値である。

$$\Pr\left[r_t < -VaR_t \mid \Omega_t\right] = \theta \qquad \theta \in (0,1).$$

金融機関では、取り扱いの簡便さから、VaR の推定に分散共分散法とヒストリカル法が広く用いられてきた。分散共分散法最大の特徴は、リスクファクターの正規分布性を仮定している点にある。この仮定を置くことで、分散共分散法を用いた VaR の推定が非常に簡単になっている。しかし、リスクファクターの従う確率分布は、一般に正規分布より分布の裾が厚い。そのため、分散共分散法を用いた VaR の推定では、99%VaR でリスクを過小評価する場合が多い。また、非線形リスクを持つオプションのリスク管理には使えない問題点もある。一方、ヒストリカル法を用いた VaR の推定は、リスクファクターの分布を仮定しないので、非線形リスクを持つオプションのリスク管理や非正規性の分布を持つリスクファクターのリスク管理にも使える。また、ヒストリカル法を用いた VaR の推定は、単純に全てのデータを用いて標本分位点を計算するので、計算としては非常に簡単である。しかし、ヒストリカル法では、過去に生じたリスクファクターの変動と同様の変動が将来に起こる確率を、過去のデータそれぞれで一様に等しいとしているため、リスクファクターの直近の変動の特徴を捉えにくいという問題がある。

現在、多くの金融機関では、VaR の推定方法を分散共分散法からヒストリカル法に移行させてきている。その主な理由は、バックテストと呼ばれる VaR の推定精度評価において、ヒストリカル法の結果が分散共分散法の結果に比べて勝っているからである。しかし、ヒストリカル法には上記問題が存在する。そのため、ヒストリカル法には、リスクファクターの直近の変動をより明確に取り込むための改良手法が提案されている。Boudoukh,Richardson and Whitelaw（1998）は、リスクファクターの直近の変動を重視するように、過去に生じたリスクファクターの変動と同様の変動が将来に起こる確率を変化させる手法を提案している。また、Hull and White（1998）、Barone-Adesi,Giannopoulos and Vosper（1999）は、リスクファクターの直近の変動を反映するように、過去のリスクファクターの大きさを修正する手法を提案している。

本論文の目的は、リスクファクターの直近の変動を考慮した VaR 推定手法として、上記手法

とは異なったアプローチの手法を提案し、本論文で提案する手法で推定された VaR を、他のヒストリカル法で推定される VaR と比較することである。

本論文で提案する手法は、VaR 推定に Quantile Regression （以下 QR 法）を用いる。QR 法は、被説明変数の分位点を説明変数で回帰する手法で、Koenker and Bassett（1978）によって提唱され、統計分野において用いられるノンパラメトリック推定（分布を仮定しない推定）手法の一つである。QR 法によって、VaR は、β を p 次元のパラメータとし、x_t で表される $t-1$ 時点で利用可能な p 次元の説明変数を用いて、$VaR_t=f_t$（x_t, β）と表される。QR 法による VaR の推定では、$g(y\,|\,x)$ を y の条件付密度関数としたとき（$1-\theta$）%VaR について以下の式が成り立つ。

$$\theta=\int_{-\infty}^{f(\mathbf{x},\boldsymbol{\beta})} g(\lambda|\mathbf{x})d\lambda$$

本論文で提案するリスクファクターの直近の変動を考慮した VaR 推定手法は上記 QR 法を用いるため、ヒストリカル法とは手法が異なる。しかし、QR 法の説明変数として、ヒストリカル法で推定した VaR と、リスクファクターの直近の変動を表す指標とを用いるため、リスクファクターの直近の変動を考慮したヒストリカル法に準じた VaR 推定手法になっている。

本論文の構成は以下の通りである。まず第 2 節で本論文が用いる VaR の推定手法の説明をする。次に第 3 節では、VaR の推定結果とその考察を行う。最後に第 4 節で結論と今後の課題を述べている。

2 Estimation Methods

本論文では、リスクファクターとして、TOPIX のリターンデータのみを用いる。そのため本節では、リスクファクターがリターンデータ 1 つの場合の VaR 推定手法を説明する。[1]

2.1 ヒストリカル法

ヒストリカル法では、サンプルリターンデータとして、過去に発生したリターンをそのまま用いている。また、サンプルリターンデータが将来同じ確率で発生すると考える。そして、経験分布を用いて VaR を推定する。ヒストリカル法による VaR 推定手順は以下の通りである。

①現時点を $t-1$ とし、$t-1, t-2, \ldots, t-i$ 時点（$t>i$）のリターンデータ（r_{t-1}, $r_{t-2}, \ldots, r_{t-i}$）をサンプルリターンデータとする。

②サンプルリターンデータ（$r_{t-1}, r_{t-2}, \ldots, r_{t-i}$）を昇順に並び替えた順序統計量を（$r'_1, r'_2, \ldots, r'_i$）とし、それぞれの順序統計量が発生する確率を等しく $\frac{1}{i}$ とする。VaR の信頼水準を 100（$1-\theta$）% とすると、ヒストリカル法を用いて推定した時点 t における VaR は、ある整数 k を用いて以下の式で表される。

[1] リスクファクターが複数の場合の VaR 推定手法は，木島 (1998)，山下 (2000)，安藤 (2004) を参照.

- $k \leq \theta_i < k+1$ と表せるとき、

$$VaR_t = -\{(\theta i - k)r'_{k+1} + (k+1-\theta i)r'_k\}. \tag{1}$$

- $\theta_i = k$ と表せるとき、

$$VaR_t = -r'_k. \tag{2}$$

上記方法が一般的なヒストリカル法である。一方、以下の式を解くことでも、ヒストリカル法の VaR を得ることができる。

$$\min_{\alpha \in \mathfrak{R}} \left\{ \sum_{t \in \{t: r_t \geq \alpha\}} \theta |r_t - \alpha| + \sum_{t \in \{t: r_t < \alpha\}} (1-\theta)|r_t - \alpha| \right\}. \tag{3}$$

並び替えによる VaR の推定と（3）式による VaR の推定では、全く方法が異なるが、理論上は全く同じ結果が得られる。

2.2　リスクファクターの直近の変動を考慮したヒストリカル法

本論文では、ヒストリカル法を改良し、リスクファクターの直近の変動を VaR の変化に反映させやすいようにした手法として、Boudoukh,Richardson and Whitelaw（1998）の手法（以下 BRW 法）、Hull and White（1998）の手法（以下 HW 法）、Barone-Adesi,Giannopoulos and Vosper（1999）の手法（以下 FHS 法[2]）を紹介する。

2.2.1　BRW 法

ヒストリカル法では、サンプルリターンデータが将来同じ確率で発生すると考える。BRW 法では、直近のサンプルリターンデータほど、発生する確率が高くなるように、各サンプルリターンデータの発生確率に重み付けを行うことで、リスクファクターの直近の変動を VaR の変化に反映させやすいようにしている。BRW 法による VaR 推定手順は以下の通りである。

①現時点を $t-1$ とし、$t-1, t-2, \dots, t-i$ 時点（$t > i$）のリターンデータ（$r_{t-1}, r_{t-2}, \dots, r_{t-i}$）をサンプルリターンデータとする。

②以下の式で表される w_j を $t-j$ 時点（$1 \leq j \leq i$）のサンプルリターンデータ r_{t-j} が将来発生する確率とする。

$$w_j = \frac{1-\lambda}{1-\lambda^i}\lambda^{j-1}. \tag{4}$$

ここで $0 < \lambda < 1$

このとき、サンプルリターンデータ（$r_{t-1}, r_{t-2}, \dots, r_{t-i}$）それぞれが発生する確率

[2] Barone-Adesi,Giannopoulos and Vosper(1999) では，提案した手法をフィルタ付きヒストリカル・シミュレーション (FHS) と呼んだ．

$(w_1, w_2, \ldots, w_i)$ は、過去のサンプルリターンデータにさかのぼるほど減少していくことがわかる。また、以下の式から、確率の合計が 1 になることも確認できる。

$$\sum_{j=1}^{i} w_j = \frac{1-\lambda}{1-\lambda^i}\sum_{j=1}^{i}\lambda^{j-1} = 1.$$

③サンプルリターンデータ $(r_{t-1}, r_{t-2}, \ldots, r_{t-i})$ を昇順に並び替えた順序統計量を $(r'_1, r'_2, \ldots, r'_i)$ とし、それぞれの順序統計量が発生する確率を $(w'_1, w'_2, \ldots, w'_i)$ とする。VaR の信頼水準を 100（$1-\theta$）% とすると、BRW 法を用いて推定した時点 t における VaR は以下の式で表される。[3]

- $\sum_{j=1}^{k} w'_j \leq \theta < \sum_{j=1}^{k+1} w'_j$ のとき、

$$VaR_t = -\frac{(\theta - \sum_{j=1}^{k} w'_j)r'_{k+1} + (\sum_{j=1}^{k+1} w'_j - \theta)r'_k}{w'_{k+1}}. \quad (5)$$

- $w'_1 \geq \theta$ のとき、

$$VaR_t = -r'_1. \quad (6)$$

2.2.2　HW 法

ヒストリカル法では、サンプルリターンデータとして、過去に発生したリターンをそのまま用いている。HW 法では、リスクファクターの直近の変動が VaR の変化に反映するように、過去に発生したリターンを修正したものをサンプルリターンデータとして用いる。HW 法による VaR 推定手順は以下の通りである。

①リターン r_t のボラティリティが指数型加重移動平均で計算されるとすると、リターン r_t は以下のように表される。

$$r_t = \sigma_t \epsilon_t, \quad (7)$$
$$\sigma_t^2 = \lambda\sigma_{t-1}^2 + (1-\lambda)r_{t-1}^2. \quad (8)$$

ここで、ϵ_t は、互いに独立で同一の分布（平均 0、分散 1）に従う確率変数とし、λ は $0 < \lambda < 1$ を満たす定数とする。現時点を $t-1$ とし、$t-1, t-2, \ldots, t-i$ 時点 $(t > i)$ のリターンデータ $(r_{t-1}, r_{t-2}, \ldots, r_{t-i})$ をサンプルリターンデータとする。通常行われるように、$\sigma_{t-i} = \frac{1}{i}\sum_{j=1}^{i} r_{t-j}^2$ とすると、(8) 式によって逐次的に（$\sigma_{t-i+1}, \sigma_{t-i+2}, \ldots, \sigma_t$）が求まる。

②(7)式より、VaR を推定するためには、ϵ_t の分布を特定する必要がある。HW 法では、ϵ_t

---

[3] この方法は，安藤 (2004) が用いた方法であり，原論文とはやや異なっている．原論文とやや異なる方法を用いる理由は，安藤 (2004) を参照.

が、過去の実現値ϵ_{t-j}（j =1, 2, ... , i）から得られる経験分布に従うとする。ここで、ϵ_{t-j}は以下の式により計算される。

$$\epsilon_{t-j} = \frac{r_{t-j}}{\sigma_{t-j}}. \tag{9}$$

手順①で得られたサンプルリターンデータと推定ボラティリティを用いて、

$$r^*_{t-j} = \frac{r_{t-j}}{\sigma_{t-j}}\sigma_t, \quad j = 1, 2, \ldots, i, \tag{10}$$

より、修正したリターン($r^*_{t-1}, r^*_{t-2}, \ldots, r^*_{t-i}$) を得る。(10) 式は、過去のリターンに$\frac{\sigma_t}{\sigma_{t-j}}$を乗じており、リスクファクターの直近の変動が VaR の変化に反映するような形になっている。

③修正したリターン($r^*_{t-1}, r^*_{t-2}, \ldots, r^*_{t-i}$) を用いて、通常のヒストリカル法と同じ手順により、VaR を推定する。

2.2.3 FHS 法

FHS 法は、ボラティリティ推定に GARCH モデルを利用する以外は、HW 法と同様である。FHS 法は、以下の式のように、リターン r_t が GARCH（1, 1）モデルに従うと仮定する。[4]

$$r_t = \sigma_t \epsilon_t, \tag{11}$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha r_{t-1}^2 + \beta\sigma_{t-1}^2. \tag{12}$$

ここで、ϵ_t は、互いに独立で同一の分布（平均 0、分散 1）に従う確率変数とし、α、β、ω はパラメータである。

本論文では、安藤（2004）と同様に、GARCH モデルのパラメータ推定に擬似最尤法を用いている。FHS モデルを用いた VaR 推定では、ボラティリティの定式化以後の手順は HW 法と全く同じである。

2.3 QR 法

Koenker and Bassett（1978）は、r_t の θ 分位点が、(3) 式を拡張した以下の式の解である $\mathrm{x}'_t \hat{\beta}$ となることを示した。

$$\begin{aligned}
&\min_{\boldsymbol{\beta}\in\Re^p} \frac{1}{T}\Big\{\sum_{t\in\{t:r_t\geq \mathbf{x}'_t\boldsymbol{\beta}\}} \theta|r_t - \mathbf{x}'_t\boldsymbol{\beta}| + \sum_{t\in\{t:r_t<\mathbf{x}'_t\boldsymbol{\beta}\}} (1-\theta)|r_t - \mathbf{x}'_t\boldsymbol{\beta}|\Big\} \\
&= \min_{\boldsymbol{\beta}\in\Re^p} \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}[\theta - I(r_t < \mathbf{x}'_t\boldsymbol{\beta})][r_t - \mathbf{x}'_t\boldsymbol{\beta}].
\end{aligned} \tag{13}$$

[4] 本論文では安藤 (2004) と同様に，簡単化のため GARCH(1,1) モデルを用いているが，原論文では，ARMA-GARCH(1,1) モデルを仮定している．

ここで x_t を $t-1$ 時点で利用可能な p 次元の説明変数とし、I（·）は定義関数を表す。
そして、Koenker and Bassett（1978）は、推定されたパラメータ $\hat{\beta}$ が一致性や漸近正規性をもつことを証明した。Engle and Manganelli（2004）は、Koenker and Bassett（1978）の線型 QR モデルを拡張し、（13）式の $\mathrm{x}'_t\,\hat{\beta}$ を $f_t(\mathrm{x}_t, \hat{\beta})$ としても、$\hat{\beta}$ が一致性や漸近正規性をもつことを証明した。（13）式からわかるように、QR 法では、ヒストリカル法と同様に、分布を特定せず、直接分位点を求めるところに特徴がある。

本論文が VaR の推定に用いる手法は、Engle and Manganelli（2004）が一致性や漸近正規性をもつことを証明した非線型 QR 法である。

2.3.1　本論文の推定手法

本論文では、非線形 QR 法の説明変数として、ヒストリカル法を用いて推定した次の日の VaR（説明変数 1）と、1 日前にリターンが VaR を越えたかどうかの情報（説明変数 2）を用いる。具体的な VaR 推定手順は以下の通りである。

過去 h 日間にリターンが VaR を越えたかどうかの情報を用いるモデル

①現時点を $t-1$ とし、$t-1, t-2, \ldots, t-i-h$ 時点（$t > i+h$）のリターンデータ（$r_{t-1}, r_{t-2}, \ldots, r_{t-i-h}$）をサンプルリターンデータとする。

② $t-1, t-2, \ldots, t-i-h$ 時点における、過去 j 日のリターンデータからヒストリカル法によって、$VaR_t^{hist}, VaR_{t-1}^{hist}, \ldots, VaR_{t-i-h+1}^{hist}$（説明変数 1）を推定する。

③VaR_{t-i}^{hist} を VaR_{t-i}（VaR の初期値）とする。

④$h>1$ のとき、$I(r_{t-i} > -VaR_{t-i}^{hist}) \times \cdots \times I(r_{t-i-h+1} > -VaR_{t-i-h+1}^{hist})$ を説明変数 2 の初期値とする。$h=1$ のとき、$I(r_{t-i} > -VaR_{t-i}^{hist})$ を説明変数 2 の初期値とする。

⑤ $h>1$ のとき、$VaR_{t-k} \equiv f_{t-k}(\mathbf{x}_{t-k}, \beta) = VaR_{t-k}^{hist} - \beta I(r_{t-k-1} > -f_{t-k-1}(\mathbf{x}_{t-k-1}, \beta)) \times \cdots \times I(r_{t-k-h} > -f_{t-k-h}(\mathbf{x}_{t-k-h}, \beta))$、$h=1$ のとき、$VaR_{t-k} \equiv f_{t-k}(\mathbf{x}_{t-k}, \beta) = VaR_{t-k}^{hist} - \beta I(r_{t-k-1} > -f_{t-k-1}(\mathbf{x}_{t-k-1}, \beta))$ とし、VaR の信頼水準を 100（$1-\theta$）% とすると、以下の式を最小化することで、$VaR_t \equiv f_t(\mathrm{x}_t, \beta)$ を推定する。

$$\min_{\beta \in \Re^1} \frac{1}{i} \Big\{ \sum_{k \in \{k : r_{t-k} \geq f_{t-k}(\mathbf{x}_{t-k}, \beta)\}} \theta |r_{t-k} - f_{t-k}(\mathbf{x}_{t-k}, \beta)| + \sum_{k \in \{k : r_{t-k} < f_{t-k}(\mathbf{x}_{t-k}, \beta)\}} (1-\theta) |r_{t-k} - f_{t-k}(\mathbf{x}_{t-k}, \beta)| \Big\}. \tag{14}$$

3　推定結果と考察

本論文では、VaR の推定の為に、1992 年 4 月 27 日から 2007 年 7 月 13 日までの TOPIX の日次リターンデータを用いる。

3.1 バックテスト結果に関する考察

バックテストとは、あるバックテスト期間に含まれるそれぞれの日のリターンが、その日以前のデータを用いて推定された VaR を超過するかどうかを調査し、超過比率が 99%VaR の理想値 1% からどれだけ乖離しているかをみることで、VaR の推定の精度を評価する方法である。本論文では、1500 日のバックテスト期間を全ての VaR 推定手法でそれぞれ一致させてバックテストを行っている。本論文の VaR 推定手法では、過去2001日分のデータのうち、最初の1001日分をヒストリカル法の VaR の推定と、1 日前にリターンが VaR を越えたかどうかの情報の初期値決定のみに用い、残りの 1000 日分のデータを用いて、非線形 QR 法を行い、次の日の VaR を推定している。そしてヒストリカル法、BRW 法、HW 法、FHS 法では、過去 1000 日分のデータから次の日の VaR を推定している。VaR の推定に用いる過去のデータ数については、ヒストリカル法では、金融機関でよく用いられる値を使い、BRW 法、HW 法、FHS 法、本論文の手法では、ヒストリカル法とデータの観測期間が一致するように決定した。

さらに本論文では、1 回目のバックテスト期間を 2000 年 6 月 8 日から 2006 年 7 月 11 日までの 1500 営業日とし、2 回目のバックテスト期間を 2000 年 6 月 9 日から 2006 年 7 月 12 日までの 1500 営業日とするように、バックテスト期間を 1 営業日ずつずらし、250 回のバックテストを行っている。

図 1 は、この 250 回のバックテストから得られる TOPIX の 99%VaR の超過比率の推移を表している。図 1 によると、本論文の手法を用いて推定した VaR は、ヒストリカル法を用いて推定した VaR と比較して全てのバックテストで推定精度が勝っていることがわかる。また、BRW 法、FHS 法を用いて推定した VaR と比較すると、全てのバックテストで推定精度が同等以上であることがわかる。最後に、HW 法を用いて推定した VaR と比較すると、一部のバックテスト期間で、本論文の手法よりも高い推定精度を示していることがわかる。以上より、VaR の推定精度の面からは、本論文の推定手法または、HW 法が VaR 推定手法として望ましいといえる。

なお、マーケットリスク規制では、自己資本の計測に銀行の内部モデルを用いる場合、99%VaR の超過比率を用いたバックテストが義務付けられている。そして、250 個の標本において、5 回以上の超過があったときには、自己資本の追加が課されることになっている。つまり、銀行にとっては、推定される 99%VaR の超過比率が 2% 未満となる必要があるが、本論文で紹介した VaR 推定手法を用いた 99%VaR で、超過比率は最大でも 1.2% を下回るという結果になっている。

3.2 VaR の年率ボラティリティに関する考察

安藤（2004）では、実際に VaR 算出手法をリスク管理実務で利用する場合に、「VaR が損失を適切に捉えていること」が最も重要であり、次にその条件が満たされたうえで、「算出される VaR の変動が過度に大きくないこと」が実務上要請されると考えている。「算出される VaR の変動が過度に大きくないこと」が重要視される理由は、リスク管理において、VaR の大きさをポジションの保有枠に用いることがあるためである。本論文でも安藤（2004）と同様に考え、各手法を用いて推定される VaR の年率ボラティリティを比較する。

図 2 は、250 回のバックテスト期間に含まれる VaR の年率ボラティリティを各バックテスト期間について計算した結果を表している。図 2 によると、ヒストリカル法、本論文の推定手法、BRW 法、HW 法の順に VaR の年率ボラティリティが約 4 % ずつ大きくなっていくことがわか

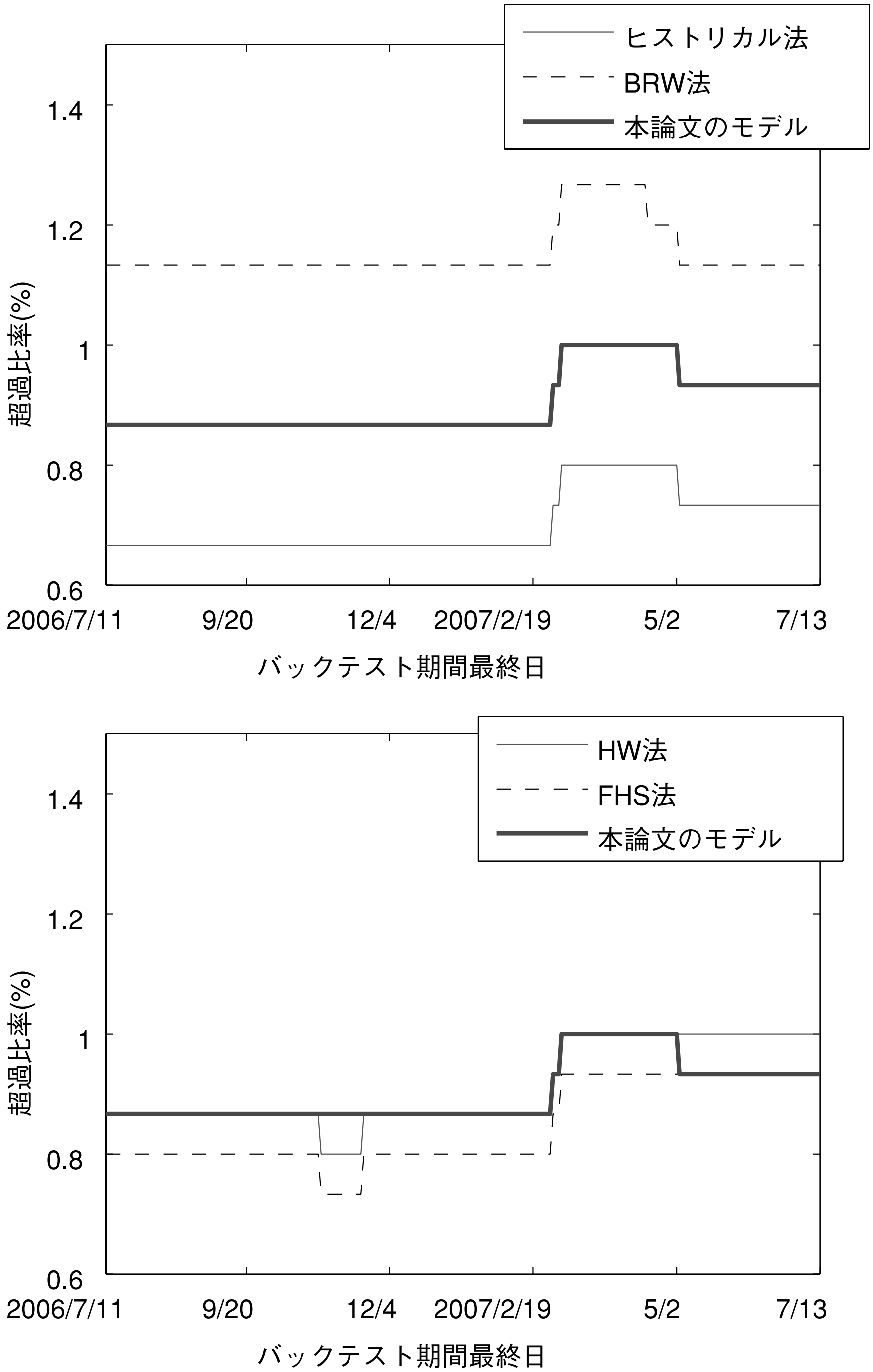

図 1　TOPIX99%VaR の超過比率の推移

る。そして、FHS 法と BRW 法の VaR の年率ボラティリティはほぼ等しいこともわかる。よって、「算出される VaR の変動が過度に大きくないこと」という観点からは、ヒストリカル法が VaR 推定手法として最も望ましく、次いで本論文の推定手法が望ましいといえる。

4　結論と今後の課題

本論文では、QR 法の説明変数にヒストリカル法で推定した VaR の値と、1 日前にリターンが VaR を越えたかどうかの情報を用いることで、リスクファクター（リターン）の直近の変動によって起こった結果を考慮した VaR 推定手法を提案した。そして、ヒストリカル法にリスクファクターの直近の変動をより明確に取り込むための改良手法である BRW 法、HW 法、FHS 法を用いて推定した VaR と、本論文の手法を用いて推定した VaR を比較した。そして、バックテストから得られる TOPIX の 99%VaR の超過比率に関する比較からは、HS 法とともに本論文の推定手法が VaR 推定手法として最も望ましいという結果が得られた。また、VaR の年率ボラティリティに関する比較からは、ヒストリカル法が VaR 推定手法として最も望ましく、次いで本論文の推定手法が望ましいという結果が得られた。

これらの結果より、本論文が提案する VaR 推定手法は、QR 法の説明変数にヒストリカル法で推定した VaR の値を用いることで、ヒストリカル法を用いて推定した VaR が持つ「算出される VaR の変動が過度に大きくない」という性質を引き継ぎつつ、1 日前にリターンが VaR を越えたかどうかの情報を利用することで推定精度が向上した VaR 推定手法であるといえる。

今後の課題としては、QR 法の説明変数として、ヒストリカル法で推定した VaR の値とどのような指標を組み合わせるべきかという課題がある。今回は、1 日前にリターンが VaR を越えたかどうかの情報を用いたが、2.3.1 より、過去 10 日間や過去 30 日間にリターンが VaR を越えたかどうかの情報を用いることも可能である。また、TOPIX の Regime に関する情報や単純に直近のリターンの値を説明変数として用いることもできる。よって、ヒストリカル法で推定した VaR の値と組み合わせる説明変数をいろいろと試していくことで、より推定精度が良く、算出される VaR の変動が大きくない VaR 推定手法を提案していきたいと思う。

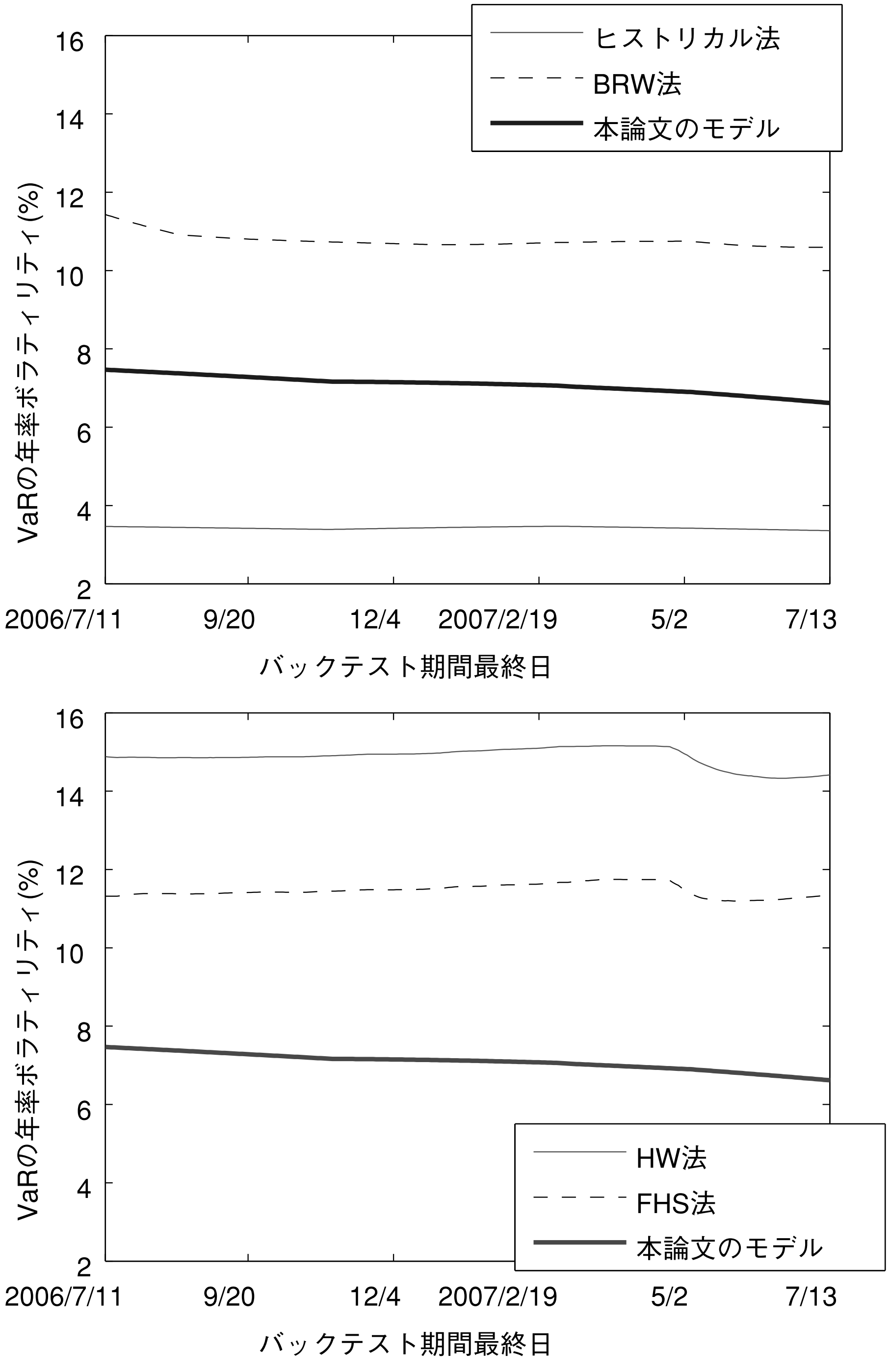

図 2　TOPIX99%VaR の年率ボラティリティ

参考文献

安藤美孝［2004]、「ヒストリカル法によるバリュー・アット・リスクの計測：市場価格変動の非定常性への実務的対応」『金融研究』23（別冊 2）.

木島正明編著［1998]、『金融リスクの計量化【上】バリュー・アット・リスク』金融財政事情研究会 .

山下智志［2000]、『市場リスクの計量化と VaR 』朝倉書店 .

山分俊幸［2007]、「Quantile Regression とヒストリカル法を用いた Value-at-Risk 推定の精度比較」名古屋商科大学総合経営・経営情報論集 第 51 巻 2 号 .

Barone-Adesi, G., K.Giannopoulos, and L.Vosper," VaR without Correlations for Non-linear Port-folios", *Journal of Futures Markets*, 19, 1999, pp.583-602.

Boudoukh, J., M.Richardson,and R.Whitelaw," The Best of Both Worlds ", *RISK* , 11(5), 1998, pp.64-67.

Chernozhoukov, V. and L.Umantsev," Conditional value-at-risk :Aspects of modeling and esti-mation", *Empirical Economics*, 26, 2001, pp.271-292.

Engle, R.F. and S.Manganelli," CAViaR：Conditional Autoregressive Value at Risk by Regression Quantiles ", *Journal of Business & Economic Statistics*, October, 2004, pp.367-381.

Ferguson, T.S.［1967], *Mathematical Statistics*: *A Decision Theoretic Approach Academic*, Press.

Hull, J. and A.White, " Incorporating Volatility Updating into the Historical Simulation Method for Value at Risk ", *Journal of Risk* 1, 1998, pp.5-19.

Koenker, R.［2005], *Quantile Regression*, Cambridge University Press.

Koenker, R. and G.Bassett, " Regression quantiles ", *Econometrica*, 46, 1978, pp.33-50.

Weiss, A., " Estimating nonlinear dynamic models using least absolute error estimation ", *Econometric Theory*7, 1991, pp.46-68.

White,H.［1994], *Estimation*, *Inference and Specification Analysis*, Cambridge Universty Press.

Wu,G.and Z.Xiao,"An analusis of risk measures ", *Journal of Risk*, Summer, 2002, pp.53-75. 13