Ricci 曲率と体積評価について
Ricci Curvature and Volume Estimate

廣　島　　　勉

1　Ricci 曲率

（M, g）を n 次元 Riemann 多様体とする。$UM = \{u \in TM \mid g(u, u) = 1\}$ を単位球バンドル、$\exp_x : \mathbb{R}_+ \times U_xM \to M$ を $x \in \mathrm{M}$ における極座標とし、$T_u(S_xM)$ の正規直交基底を、測地線 $t \mapsto exp_x(t, u)$に沿って平行移動したベクトル場 $\{e_i(t)\}_{i=1,2,\ldots,n-1}$ を一つ固定する。$(t, u) \in \mathbb{R}_+ \times S_xM$ における微分をこの基底で

$$d\exp_x(t, u) = A(t, u) \tag{1.1}$$

と表現するとき、$A = A(t, u)$ は微分方程式、

$$\frac{d^2}{dt^2}A(t, u) + R\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big)A(t, u) = 0 \tag{1.2}$$

の初期条件 $A(0, u) = 0$、$\frac{d}{dt}A(0, u) = \mathrm{Id}$ を満たす解となる。$\mathrm{R}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{ij} = \mathrm{R}\left(e_i, \frac{\partial}{\partial t}, e_j, \frac{\partial}{\partial t}\right)$ は Riemann 曲率の当該の基底における行列表現であり、 その trace が Ricci 曲率 Ric である。

$$\mathrm{Ric}\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big) = \mathrm{tr}\,R\Big(e_i, \frac{\partial}{\partial t}, e_j, \frac{\partial}{\partial t}\Big) \tag{1.3}$$

A が正則である限り、$\frac{dA}{dt}A^{-1}$ を微分すると、(1.2) より、

$$\frac{d^2A}{dt^2}A^{-1} - \left(\frac{dA}{dt}A^{-1}\right)^2 = -R\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big) - \frac{d}{dt}A^{-1} \tag{1.4}$$

が得られる。したがって、$\Phi = \frac{dA}{dt}A^{-1} - \frac{Id}{t}$とおくと、

$$\frac{d\Phi}{dt} + \phi^2 + \frac{2\,\Phi}{t} = -R\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big) \tag{1.5}$$

を得る。Φ は A の初期条件から $\Phi(0, u) = 0$ を満たし、$\mathrm{R}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)$ が対称行列であることから、Φ も対称行列となる。

(1.5) の trace をとって、$\varphi = \frac{\mathrm{tr}\Phi}{n-1}$とおくと、$\mathrm{tr}\,\Phi^2 \geq \frac{(\mathrm{tr}\Phi)^2}{n-1}$に注意すれば、(1.3) から、

$$\frac{d\varphi}{dt} + \varphi^2 + \frac{2\varphi}{t} \leq -\frac{1}{n-1}\,\mathrm{Ric}\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big) \tag{1.6}$$

を得る。

2　体積要素について

Riemann 多様体（M, g） の体積要素 dv は、極座標$\mathbb{R}_+ \times S^{n-1} \to M$ によって、

$$dv = \det A(t,u)\, dt\, du \tag{2.1}$$

と表現される。du は $S^{n-1} = U_x M$ の標準的な体積要素である。

A が正則である限り $\frac{d \det A}{dt} = \det A \operatorname{tr}\left(\frac{dA}{dt} A^{-1}\right)$ であることから、

$$\frac{1}{n-1}\frac{d\det A}{dt} - \frac{\det A}{t} = \varphi \det A \tag{2.2}$$

である。故に、

$$r\det A(r,u) - n\int_0^r \det A(t,u)\, ds = (n-1)\int_0^r t\varphi \det A(t,u)\, dt \tag{2.3}$$

を得る。

$c(u)$を $u \in U_x M$ の cut value として、$c(u) > r$ なる $u \in U_x M$ について（2.3）を積分して、

$$r\operatorname{Area}(\partial B_x(r)) - n\operatorname{Vol}(B_x(r)) \le (n-1)\int_{B_x(r)} t\varphi_+\, dv \tag{2.4}$$

を得る。ここで、$\varphi_+ = \max(\varphi, 0)$ である。また t は x からの距離関数であることに注意する。

3　φ_+ の評価

ここでは Petersen, Wei ら（[4],[5]）に従ってφ_+ の評価を考察する。$\varphi > 0$ であるならば、（1.6）と（2.2）から、

$$\frac{d}{dt}(\varphi^{p-1}\det A) + (p-n)\varphi^p \det A + \frac{2p-n-1}{t}\varphi^{p-1}\det A = -\frac{p-1}{n-1}\operatorname{Ric}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\varphi^{p-2}\det A \tag{3.1}$$

を得る。

ここで、$p > n$、$\lambda_+ = \max\left(-\frac{\operatorname{Ric}(\frac{\partial}{\partial t})}{n-1}, 0\right)$ とする。$\varepsilon > 0$ として、Young の不等式、

$$\lambda_+ \varphi_+^{p-2} \le \frac{2}{p}\varepsilon^{-\frac{p}{2}}\lambda_+^{\frac{p}{2}} + \frac{p-2}{p}\varepsilon^{\frac{p}{p-2}}\varphi_+^p$$

を $\varepsilon^{\frac{p}{p-2}} = \frac{p-n}{p-1}$で適用すれば（[2]）、$\varphi_+ > 0$ であるかぎり、

$$\frac{d}{dt}\left(\varphi_+^{p-1}\det A\right) + \frac{2(p-n)}{p}\varphi_+^p \det A + \frac{2p-n-1}{t}\varphi_+^{p-1}\det A \le \frac{2(p-n)}{p}\left(\frac{p-1}{p-n}\right)^{\frac{p}{2}}\lambda_+^{\frac{p}{2}}\det A \tag{3.2}$$

を得る。 これを積分して、

$$\int_{B_x(r)} \varphi_+^p\, dv + \frac{p(2p-n-1)}{2(p-n)}\int_{B_x(r)} \frac{\varphi_+^{p-1}}{t}\, dv \le \left(\frac{p-1}{p-n}\right)^{\frac{p}{2}}\int_{B_x(r)} \lambda_+^{\frac{p}{2}}\, dv \tag{3.3}$$

を得る。

4　上からの体積評価

まず測地球の体積 $\mathrm{Vol}(B_x(r))$ が、 λ_+ の積分で上から評価できることを示そう。

(2.4) と (3.3) から、$p > n$ のとき、

$$r\,\mathrm{Area}(\partial B_x(r)) - n\,\mathrm{Vol}(B_x(r)) \leq r(n-1)\left(\frac{p-1}{p-n}\right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{Vol}(B_x(r))^{1-\frac{1}{p}} \left(\int_{B_x(r)} \lambda_+^{\frac{p}{2}}\,dv\right)^{\frac{1}{p}} \tag{4.1}$$

Area（∂B_x（r））$= \frac{d\,\mathrm{vol}(B_x(r))}{dr}$ と表されることに注意すれば、

$$\left(\frac{\mathrm{Vol}(B_x(r))}{r^n}\right)^{\frac{1}{p}-1} \frac{d}{dr}\left(\frac{\mathrm{Vol}(B_x(r))}{r^n}\right) \leq \frac{n-1}{r^{\frac{n}{p}}}\left(\frac{p-1}{p-n}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{B_x(r)} \lambda_+^{\frac{p}{2}}\,dv\right)^{\frac{1}{p}} \tag{4.2}$$

さらに r で積分すると、Peterson-Wei の体積評価を得る。

定理 4.1 （M, g）を n 次元 Riemann 多様体とする。$\frac{\partial}{\partial t}$を、$x \in M$ を起点とする測地流の生成するベクトル場とし、 $\lambda_+ = \max$（$-\frac{\mathrm{Ric}(\frac{\partial}{\partial t})}{n-1}, 0$）とする。このとき、$p > n$、$r > 0$ に対し、

$$\left(\frac{\mathrm{Vol}(B_x(r))}{r^n}\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\frac{\mathrm{Area}(S^{n-1})}{n}\right)^{\frac{1}{p}} + \frac{n-1}{p-n}\left(\frac{p-1}{p-n}\right)^{\frac{1}{2}} r^{1-\frac{p}{n}} \left(\int_{B_x(r)} \lambda_+^{\frac{p}{2}}\,dv\right)^{\frac{1}{p}} \tag{4.3}$$

が成立する。

5　下からの評価

逆に、 Vol（B_x（r）） を下から評価するには λ_+ のさらに強い仮定が必要である。 例については [1] を参照してもらいたい。

$x \in M$ における M の半径、すなわち、$R = \max\{c$（u）$|u \in U_xM\}$ とする。(4.2) を、$[r, R]$ で積分すると、

$$\left(\frac{\mathrm{Vol}(M)}{R^n}\right)^{\frac{1}{p}} - \left(\frac{\mathrm{Vol}(B_x(r))}{r^n}\right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{n-1}{p-n}\left(\frac{p-1}{p-n}\right)^{\frac{1}{2}} R^{1-\frac{p}{n}} \left(\int_M \lambda_+^{\frac{p}{2}}\,dv\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{5.1}$$

すなわち、

$$\frac{\mathrm{Vol}(B_x(r))}{r^n} \geq \frac{\mathrm{Vol}(M)}{R^n}\left(1 - \frac{n-1}{p-n}\left(\frac{p-1}{p-n}\right)^{\frac{1}{2}} R \left(\frac{1}{\mathrm{Vol}(M)}\int_M \lambda_+^{\frac{p}{2}}\,dv\right)^{\frac{1}{p}}\right)^p \tag{5.2}$$

を得る。 このことから次の命題が成立する。

命題 5.1 n 次元 Riemann 多様体 (M, g) とする。$p > n$、$x \in M$ が与えられたとする。R を $x \in M$ における M の半径とするとき、$0 \leq \eta < 1$ である η に対し、

$$R^2\left(\frac{1}{\mathrm{Vol}(M)}\int_M \lambda_+^{\frac{p}{2}}\,dv\right)^{\frac{2}{p}} \leq \frac{(p-n)^3}{(p-1)(n-1)^2}\eta^2$$

が成立するならば、

$$\frac{\mathrm{Vol}(B_x(r))}{r^n} \geq \frac{\mathrm{Vol}(M)}{R^n}(1-\eta)^p$$

が成立する。

参考文献

[1] S. Gallot, *Isoperimetric inequalities based on integral norms of Ricci curvature*, Astérisque, 157-158（1988）, 191-216.

[2] T. Hiroshima *Volumes of Geodesic Balls and Integral Norms of Ricci Curvature on Riemannian Manifolds*, NUCB Journal of Economics and Information Science Vol. 48 No. 2, （2004） 229-236.

[3] T. Hiroshima *On Riemannian Manifolds whose Ricci Curvature has some Integral Bounds*, NUCB Journal of Economics and Information Science Vol. 49 No. 2, （2005） 283-289.

[4] P. Petersen and G.Wei, *Relative volume comparison with integral curvature bounds*, GAFA 7 （1997）, 1031-1045.

[5] P. Petersen and G. Wei, *Analysis and geometry on manifolds with integral Ricci curvature bounds*, Trans. Amer. Math. Soc. 353 （2001） 457-478.