Ricci 曲率の積分ノルムと Jensen の不等式
Integral Norms of Ricci Curvature and Jensen's Inequality

廣　島　　　勉

1　Jensen の不等式

n 次元 Riemann 多様体 (M, g) の距離関数を d、$x \in M$ を中心とする半径 r の測地球を $B_x(r) = \{y \in M \mid d(x, y) \leq r\}$、その体積を $\mathrm{Vol}(B_x(r))$ で表す。

定曲率 K の n 次元定曲率空間における半径 r の測地球の体積 $V^K(r)$ とすると、次の比較定理が成立する。

定理 1.1 (Bishop-Gromov の比較定理 ([7])). *Ricci* 曲率 $\mathrm{Ric} \geq (n-1)Kg$ である n 次元 *Riemann* 多様体 (M, g) において、$x \in M$, $R > r > 0$ とするならば、

$$\frac{\mathrm{Vol}(B_x(r))}{V^K(r)} \geq \frac{\mathrm{Vol}(B_x(R))}{V^K(R)}$$

が成立する。

本定理で R を (M, g) の直径 $\mathrm{diam}(M)$ にとることで、測地球の体積の局所増大性条件が得られる。

系 1.2.　n 次元 *Riemann* 多様体 (M, g) が、$\mathrm{Ric} \geq (n-1)Kg$, $\mathrm{diam}(M) \leq D$, $\mathrm{Vol}(M) \geq v$ を満たすならば、

$$\frac{\mathrm{Vol}(B_x(r))}{V^K(r)} \geq \frac{v}{V^K(D)}$$

が成立する。

著者の論文［3］では Riemann 多様体のクラスに対する測地球の体積の局所増大性条件に現れる定数を Ricci 曲率 Ric のある種の積分ノルムで評価する試みを行った。

定義 1 (測地球の体積の局所増大性条件)。$\mathcal{M}$ を n 次元 *Riemann* 多様体のクラスとする。$\mathcal{M}$ が測地球の体積の局所増大性条件を満たすとは、ある $\mathcal{M}$ に属する多様体に依存しない定数 $\gamma > 0$, $t > 0$ が存在して、任意の $(M, g) \in \mathcal{M}$、$x \in M$、r $(0 < r < t)$ に対し

$$\frac{\mathrm{Vol}(B_x(r))}{r^n} \geq \gamma$$

が成立することである。

本論文では同様の評価が Jensen の不等式を用いることで得られることを示す。Jensen の不等式は凸関数に対し成立する一般的な不等式である。ここで、本論文で使用する指数関数に関する Jensen の不等式について述べる。指数関数に注目するのは、対数関数の性質が後に体積の相対評価に繋がるからである。

命題 1.3. f を測度空間（M, μ）の可測関数とするとき、

$$\exp\left(\frac{\int f d\mu}{\int d\mu}\right) \leq \frac{\int \exp(f) d\mu}{\int d\mu}$$

が成立する。

証明. 指数関数の Taylor 展開により、

$$\exp(f) - \exp\left(\frac{\int f d\mu}{\int d\mu}\right) \geq \exp\left(\frac{\int f d\mu}{\int d\mu}\right) \cdot \left(f - \frac{\int f d\mu}{\int d\mu}\right)$$

である。これを M で積分して命題を得る。 □

2　関数 λ_+ と関数 φ_+

$\mathbb{R}_+ = \{s \in \mathbb{R} \mid s \geq 0\}$、$U_x M = \{u \in T_x M \mid |u| = 1\}$ とする。

議論の対象とするのは Ricci 曲率から定まる関数の積分ノルムである。

定義 2（関数 λ_+）. $\lambda : M \to \mathbb{R}$を、

$$\lambda(x) = -\frac{1}{n-1} \min\left\{\mathrm{Ric}(u,u) | u \in U_x M\right\}, \tag{2.1}$$

$\lambda_+ : M \to \mathbb{R}_+$ を、

$$\lambda_+(x) = \max\{\lambda(x), 0\}$$

で定める。

極座標 $\mathbb{R}_+ \times U_x M \ni (s, u) \mapsto \exp_x(su) \in M$ において(M, g)の体積要素を

$$dv = \alpha\, ds\, d\omega = a^{n-1}\, ds\, d\omega$$
$$a = a(s,u) \geq 0$$
$$\alpha = a^{n-1}$$

と表す。

c(u)を $u \in U_x M$ 方向の cut value すなわち、

$$c(u) = \sup\left\{t \mid d\left(x, \exp_x(su)\right) = s, 0 < {}^\forall s < t\right\}$$

とすると、$0 < s < c(u)$において $a = a(s, u)$は、

$$a > 0, \quad a'' \leq \lambda a \tag{2.2}$$

を満たす。$\lambda = \lambda\left(\exp_x(su)\right)$は(2.1)で定義された関数であり、$'$ は s に関する偏微分とする。

定義 3 （関数φ_+）. 関数$\varphi=\varphi(s,u)$、$\varphi_+=\varphi_+(s,u)$を

$$\varphi=\frac{a'}{a}-\frac{1}{s}, \qquad (2.3)$$
$$\varphi_+=\max\{\varphi,0\}$$

で定義する。

φとλの間には次の関係式が成立する。

命題 2.1.

$$\varphi'\le-\frac{2\varphi}{s}-\varphi^2+\lambda \qquad (2.4)$$

証明. (2.3)をsに関して微分して、

$$a''-\frac{a'}{s}+\frac{a}{s^2}=\varphi'a+\varphi a',$$

さらに(2.3)を使って、

$$a''-\frac{\varphi a}{s}=\varphi'a+\frac{\varphi a}{s}+\varphi^2 a,$$

したがって、

$$\varphi'=-\frac{2\varphi}{s}-\varphi^2+\frac{a''}{a}$$

を得る。命題は（2.2）から従う。

$p>n$のとき、この(2.4)から、Petersen, Wei らはφ_+と、λ_+の間の積分不等式を導いた([5],[6])。定数$\left(\frac{p-1}{p-n}\right)^{\frac{p}{2}}$の明示的な計算は [3] による。

命題 2.2. $p>n$のとき、不等式

$$\int_0^r \varphi_+^p\,\alpha\,ds \le\left(\frac{p-1}{p-n}\right)^{\frac{p}{2}}\int_0^r \lambda_+^{\frac{p}{2}}\alpha\,ds$$

が成立する。

補題 1. $p\ge n$とするとき、不等式

$$(2p-n-1)\int_0^r\frac{\varphi_+^{p-1}}{s}\alpha\,ds+(p-n)\int_0^r\varphi_+^p\alpha\,ds\le(p-1)\int_0^r\lambda_+\varphi_+^{p-2}\alpha\,ds \qquad (2.5)$$

が成立する。

証明. 関数φ_+のsに関する微分を

$$\varphi_+'(s,u)=\lim_{\Delta s\downarrow 0}\frac{\varphi_+(s+\Delta s,u)-\varphi_+(s,u)}{\Delta s}$$

と考える。

$$\left(\varphi_+^{p-1}\right)' \leq -2(p-1)\frac{\varphi_+^{p-1}}{s} - (p-1)\varphi_+^2 + (p-1)\lambda_+\varphi_+^{p-2}$$

および、

$$\alpha' = (n-1)\left(\frac{a}{s} + \varphi a\right)a^{n-2} \leq (n-1)\left(\frac{1}{s} + \varphi_+\right)\alpha \tag{2.6}$$

から、

$$\begin{aligned}\left(\varphi_+^{p-1}\alpha\right)' &= \left(\varphi_+^{p-1}\right)'\alpha + \varphi_+^{p-1}\alpha' \\ &\leq -(2p-n-1)\frac{\varphi_+^{p-1}\alpha}{s} - (p-n)\varphi_+^p\alpha + (p-1)\lambda_+\varphi_+^{p-2}\alpha\end{aligned}$$

を得る。両辺を 0 から $r > 0$ まで積分して、次を得る。

$$\begin{aligned}\varphi_+^{p-1}\alpha|_{s=r} + (2p-n-1)\int_0^r \frac{\varphi_+^{p-1}}{s}\alpha\, ds + (p-n)\int_0^r \varphi_+^p \alpha\, ds \\ \leq (p-1)\int_0^r \lambda_+\varphi_+^{p-2}\alpha\, ds\end{aligned}$$

ここで、$\varphi_+^{p-1}\alpha \geq 0$ なので、補題は証明された。
命題 2.2 の証明. $\varepsilon > 0$ として、Young の不等式、

$$\lambda_+\varphi_+^{p-2} \leq \frac{2}{p}\varepsilon^{-\frac{p}{2}}\lambda_+^{\frac{p}{2}} + \frac{p-2}{p}\varepsilon^{\frac{p}{p-2}}\varphi_+^p$$

を (2.5) に適用し、$\delta = \frac{(p-1)(p-2)}{p(p-n)}\varepsilon^{\frac{p}{p-2}}$ ととれば、

$$(1-\delta)\delta^{\frac{p}{2}-1}\int_0^r \varphi_+^p\alpha\, ds \leq \frac{2(p-1)}{p(p-n)}\left(\frac{(p-1)(p-2)}{p(p-n)}\right)^{\frac{p}{2}-1}\int_0^r \lambda_+^{\frac{p}{2}}\alpha\, ds,$$

さらに $\delta = \frac{p-2}{p} < 1$ とおいて、

$$\frac{2}{p}\left(\frac{p-2}{p}\right)^{\frac{p}{2}-1}\int_0^r \varphi_+^p\alpha\, ds \leq \frac{2(p-1)}{p(p-n)}\left(\frac{(p-1)(p-2)}{p(p-n)}\right)^{\frac{p}{2}-1}\int_0^r \lambda_+^{\frac{p}{2}}\alpha\, ds.$$

これから命題 2.2 が従う。
　最後に $\exp(\varphi_+)$ と $\exp(\lambda_+)$ の間に成立する積分不等式を導こう。

命題 2.3. n 次元 *Riemann* 多様体 (M, g) の次元 n にのみ依存する定数 $c_1 = c_1(n) > 0$, $c_2 = c_2(n) > 0$ が存在して、任意の $k > 0$ に対し不等式

$$\int_0^r \exp((n-1)k\varphi_+)\alpha\, ds \leq c_1\int_0^r \exp(c_2 k\lambda_+^{\frac{1}{2}})\alpha\, ds$$

が成立する。
証明 . $p > n$ である整数 p に対しては、命題 2.2 から、

$$\int_0^r \varphi_+^p \alpha\, ds \le \int_0^r (n\lambda_+)^{\frac{p}{2}} \alpha\, ds, \tag{2.7}$$

であり、$1 \le p \le n$ である整数 p に対しては、Young の不等式から任意の $\varepsilon > 0$ に対し、

$$\int_0^r \varphi_+^p \alpha\, ds \le \frac{n\varepsilon^{\frac{n+1}{n}}}{n+1} \int_0^r \alpha\, ds + \frac{1}{(n+1)\varepsilon^{n+1}} \int_0^r \varphi_+^{p(n+1)} \alpha\, ds$$

であるので、$\varepsilon > 0$ を適当にとって(2.7)を適用すれば命題が従う。 □

3 測地球の体積の局所増大性

指数関数に対する Jensen の不等式を測地球の体積評価に適用する。$V(r)$ を $x \in M$ を中心とする n 次元 Riemann 多様体の半径 r の測地球の体積、すなわち、$V(r) = \mathrm{Vol}(B_x(r)) = \int_{B_x(r)} dv = \int_{S^{n-1}} \int_0^r \alpha\, ds d\theta$ とする。

命題 3.1. 不等式

$$(\log V(r))' \le \frac{n}{r} + r \log \frac{\int_{B_x(r)} \exp((n-1)\varphi_+)\, dv}{V(r)} \tag{3.1}$$

が成立する。

証明. (2.6)から、

$$s\alpha' \le (n-1)\alpha + (n-1)s\varphi_+\alpha,$$

これを 0 から r まで両辺を積分して、

$$r\alpha|_{s=r} \le n \int_0^r \alpha\, ds + (n-1)r \int_0^r \varphi_+ \alpha\, ds, \tag{3.1}$$

さらに、S^{n-1} で積分して、

$$r \int_{S^{n-1}} \alpha|_{s=r} ds\, d\theta \le n \int_{S^{n-1}} \int_0^r \alpha ds\, d\theta + (n-1)r \int_{S^{n-1}} \int_0^r \varphi_+ \alpha ds\, d\theta$$

である。

ここで、$V'(r) = \int_{S^{n-1}} \alpha|_{s=r}\, d\theta$ であるので、Jensen の不等式を適用して、

$$\begin{aligned} rV'(r) &\le nV(r) + (n-1)r \int_{B_x(r)} \varphi_+\, dv \\ &\le nV(r) + rV(r) \log \frac{\int_{B_x(r)} \exp((n-1)\varphi_+)\, dv}{V(r)} \end{aligned}$$

を得る。 □

命題 3.1 から、半径の異なる測地球の体積の相対評価が導かれる。

定理 3.2. (M, g) を n 次元 *Riemann* 多様体、$0 < r < R$ とする。次元 n にのみ依存する定数 $c_1 = c_1(n) > 0$, $c_2 = c_2(n) > 0$ が存在して、不等式

$$\frac{\mathrm{Vol}(B_x(R))}{\mathrm{Vol}(B_x(r))} \le \left(\frac{R^n}{r^n}\left(\frac{c_1\int_{B_x(R)}\exp(c_2\lambda_+^{\frac{1}{2}})\,dv}{\mathrm{Vol}(B_x(R))}\right)^{R-r}\right)^{\exp(R-r)}$$

が成立する。

証明. (3.1) において $v(r) = \frac{V(r)}{V(R)}$ として、

$$(\log v(r))' + \log v(r) \le \frac{n}{r} + \log\frac{\int_{B_x(R)}\exp((n-1)\varphi_+)\,dv}{V(R)}.$$

$\frac{\int_{B_x(R)}\exp((n-1)\varphi_+)\,dv}{V(R)} \ge 1$ であるので、次を得る。

$$(e^r\log v(r))' \le e^R\left(\frac{n}{r} + \log\frac{\int_{B_x(R)}\exp((n-1)\varphi_+)\,dv}{V(R)}\right).$$

$v(R) = 1$ であることに注意して両辺を r から R まで積分すると、

$$-e^r\log v(r) \le e^R\left(n\log\frac{R}{r} + (R-r)\log\frac{\int_{B_x(R)}\exp((n-1)\varphi_+)\,dv}{V(R)}\right)$$

となる。従って、

$$\log\frac{V(R)}{V(r)} \le e^{R-r}\left(n\log\frac{R}{r} + (R-r)\log\frac{\int_{B_x(R)}\exp((n-1)\varphi_+)\,dv}{V(R)}\right)$$

となり、定理は導かれた。

定理 3.2 において $R = \mathrm{diam}(M)$ とすれば、測地球の体積の局所増大性が次の形で得られる。

系 3.3. (M, g) を n 次元 *Riemann* 多様体、$0 < r < R$ とする。次元 n にのみ依存する定数 $c_1 = c_1(n) > 0$, $c_2 = c_2(n) > 0$ が存在して、不等式

$$\frac{\mathrm{Vol}(B_x(r)))}{\mathrm{Vol}(M)} \ge \left(\frac{r^n}{\mathrm{diam}(M)^n}\left(\frac{\mathrm{Vol}(M)}{c_1\int_M\exp(c_2\lambda_+^{\frac{1}{2}})\,dv}\right)^{\mathrm{diam}(M)-r}\right)^{\exp(\mathrm{diam}(M)-r)}$$

が成立する。

参考文献

[1] B. Croke, *Some Isoperimetric Inequalities and eigenvalue estimates*, Ann. scient. Éc. Norm. Sup., 4e série, t. 13 (1980), 419-435.

[2] S. Gallot, *Isoperimetric inequalities based on integral norms of Ricci curvature*, Astérisque, 157-158 (1988), 191-216.

[3] T. Hiroshima *Volumes of Geodesic Balls and Integral Norms of Ricci Curvature on Riemannian Manifolds*, NUCB Journal of Economics and Information Science Vol. 48 No. 2, (2004) 229-236.

[4] T. Hiroshima *On Riemannian Manifolds whose Ricci Curvature has some Integral Bounds*, NUCB Journal of Economics and Information Science Vol. 49 No. 2, (2005) 283-289.

[5] P. Petersen and G. Wei, *Relative volume comparison with integral curvature bounds*, GAFA 7 (1997), 1031-1045.

[6] P. Petersen and G. Wei, *Analysis and geometry on manifolds with integral Ricci curvature bounds*, Trans. Amer. Math. Soc. 353 (2001) 457-478.

[7] S. Zhu, *The Comparison Geometry of the Ricci Curvature*, Comparison Geometry, MSRI Publications, Volume 30, (1987) 221-262.