リーマン多様体上の経路積分について
A Thought about Feynman Path Integral on Riemannian Manifold

廣　島　　勉

1　はじめに

n次元ユークリッド空間$\mathbb{R}^n$の関数Vをポテンシャルとするシュレディンガー作用素を$-\Delta+V$ $=\sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}+V$とし，$\nu$を定数として偏微分方程式

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}=\frac{\nu}{2}(-\Delta+V)\varphi \tag{1.1}$$

を考える．この方程式は$\nu=1$の場合はポテンシャル付の熱方程式であり，νが純虚数の場合シュレディンガー方程式となる．

VをポテンシャルとするラグランジェアンLは，

$$L(x,v)=\frac{1}{2}|v|^2-V(x)$$

で与えられる．$\gamma=\gamma(s):[0,t]\to\mathbb{R}^n$を$\mathbb{R}^n$における経路とする．$\gamma$の作用積分$\mathcal{A}$は次で与えられる．

$$\mathcal{A}(\gamma)=\int_0^t L\left(\gamma(s),\frac{d}{ds}\gamma(s)\right)ds.$$

始点$x_0=\gamma(0)$と終点$x=\gamma(t)$を固定した経路γに関して

$$\exp\left(-\nu\mathcal{A}(\gamma)\right)$$

の和

$$\int\exp\left(-\nu\mathcal{A}(\gamma)\right)\mathcal{D}\gamma \tag{1.2}$$

をとると，関数Vをポテンシャルとする偏微分方程式(1.1)の基本解が得られると言うのがファインマン経路積分のアイディアである．ただし，経路積分(1.2)の計算に自然な測度を期待するのは不可能であり，何らかの解釈が必要となる．

[2]では$\mathbb{R}^n$における経路γを古典軌道からの変分で表し，作用素$-\frac{d^2}{ds^2}$の固有関数に分解し，その振幅を積分パラメータとして経路積分を表現することを試みた．

リーマン多様体上でのシュレディンガー作用素に対し，同様の試みが可能であるのかを考察したい．簡単のため，ポテンシャルVは恒等的に0であるとし，$\nu=1$とした，単純なリーマン多様体上のLaplace-Beltrami作用素$-\Delta$に関する熱方程式の場合を考える．

2　リーマン多様体上の経路

(M,g)をリーマン多様体，dvをgから定義される体積要素とする．基点$x_0\in M$を固定したとき，熱方程式の基本解である熱核$H_t(x,x_0)$のテスト関数$f\in C^\infty(M)$への作用

$$\mathcal{H}_t f(x_0)=\int_M f(x)H_t(x,x_0)dv(x) \tag{2.1}$$

は，M上の経路積分を使った表現では，

$$\mathcal{H}_t f(x_0) = \int f(\gamma(t)) \exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^t \left|\frac{d\gamma}{ds}\right|^2 ds\right) \mathcal{D}\gamma \tag{2.2}$$

となると予想される．ここでは$\mathcal{D}\gamma$によって,$\gamma(0)=x_0$となるM上の経路$\gamma:[0,t]\ni s\mapsto x\in M$にわたって経路積分することとしている．

$s\in[0,t]$とするとき,$\xi(s)\in T_{x_0}M$をγの接ベクトル$\frac{d\gamma}{ds}\in T_{\gamma(s)}M$を, 経路$\gamma|_{[0,s]}$に沿って$T_{x_0}M$に平行移動したものとする.$\xi:[0,t]\to T_{x_0}M$であり，その$L^2$ノルムを

$$\left\|\frac{d\gamma}{ds}\right\|^2 = \int_0^t \left|\frac{d\gamma}{ds}\right|^2 ds,$$
$$\|\xi\|^2 = \int_0^t |\xi(s)|^2 ds$$

で定義すれば,

$$L^{2,1}([0,t],M) = \left\{\gamma \mid \gamma:[0,t]\to M, \left\|\frac{\partial\gamma}{\partial s}\right\| < \infty\right\},$$
$$L^2([0,t],T_{x_0}M) = \{\xi \mid \xi:[0,t]\to T_{x_0}M, \|\xi\|<\infty\}$$

において，$L^{2,1}([0,t],M)\ni\gamma\mapsto\xi\in L^2([0,t],T_{x_0}M)$ の対応があり，$\left\|\frac{d\gamma}{ds}\right\| = \|\xi\|$となる．

3　主束 P 上の経路

$\pi: P\to M$を計量を持つ接ベクトル束(TM, g) から定義されるM上の主$O(n)$ バンドルとする．Pの構造群$G=O(n)$ のリー環を$\mathfrak{g}=\mathfrak{o}(n)$で表わす.

ωを(M,g) のLevi-Civita 接続から定義されるP上の接続形式，θを$u\in P$, $X\in T_uP$のとき,

$$\theta(X) = u^{-1}\pi(X)$$

で定義されるP上の基本形式とする．

また, $A\in\mathfrak{g}$に対し, 構造群GのPへの作用によるAの基本垂直ベクトル場を$*A$, $\xi\in\mathbb{R}^n$に対し,基本水平ベクトル場を$*\xi$で表わす．すなわち，$*A, *\xi$ は

$$\omega(*A)=A,\ \theta(*A)=0,$$
$$\omega(*\xi)=0,\ \theta(*\xi)=\xi$$

で定まるP上のベクトル場とする．

$f\in C^\infty(M)$の$\pi: P\to M$による引き戻しを$\hat{f}=f\circ\pi$と表わすとする．(M,g) のLaplace-Beltrami作用素Δは，ユークリッド空間$\mathbb{R}^n$の正規直交基底を$\{e_i\}$ とするとき，基本水平ベクトル場$\{*e_i\}$のリー微分$L(*e_i)$ によって,

$$-\Delta f = \sum_i L^2_{*e_i}\hat{f}$$

で与えられる.

$\hat{\gamma}$をMの経路γのPへの水平な持ち上げとする．すなわち, $\frac{d}{ds}$を$\hat{\gamma}$に沿った$\hat{\gamma}$の接ベクトルとすると, $\hat{\gamma}$は微分方程式

$$\theta\left(\frac{d}{ds}\right) = u_0^{-1}\xi,$$
$$\omega\left(\frac{d}{ds}\right) = 0,$$

のP上の解曲線である．ここで，主束の元 $u_0 = \hat{\gamma}(0) \in P$ は正規直交枠 $u_0 : \mathbb{R}^n \to T_{x_0}M$とみなしている．

$\hat{\gamma}$の始点$u_0 \in P$を固定し，$u_0 : \mathbb{R}^n \to T_{x_0}M$で，同一視$\mathbb{R}^n \cong T_{x_0}M$を行うものとする．

$\xi : [0,1] \to \mathbb{R}^n \cong T_{x_0}M$が与えられたとき，$\xi_t : [0,t] \to \mathbb{R}^n$を $\xi_t(s) = \frac{1}{\sqrt{t}}\xi\left(\frac{s}{t}\right)$で定める．初期条件$\hat{\gamma}(0) = u_0$に対する微分方程式

$$\begin{aligned} \theta\left(\frac{d}{ds}\right) &= \xi_t, \\ \omega\left(\frac{d}{ds}\right) &= 0 \end{aligned} \tag{3.1}$$

のP上での解曲線を $\hat{\gamma}$とし，それをMに射影した経路を$\gamma = \pi \circ \hat{\gamma}$とする．

ξに対し，γを対応させることで，写像$L^2([0,1],\mathbb{R}^n) \ni \xi \mapsto \gamma \in L^{2,1}([0,t], M)$を得る．この写像から空間$L^2([0,1],\mathbb{R}^n)$における積分を定義し，(2.2) の経路積分を

$$\mathcal{H}_t f(x_0) = \int f(\gamma(t)) \exp\left(-\frac{\|\xi\|^2}{2}\right) \mathcal{D}\xi \tag{3.2}$$

のように表現する可能性を考えたい．

4 $f(\gamma(t))$の時刻tに関する微分

まずは，経路積分による基本解が熱方程式を満たし得るのかに注目する．

熱核 $H_t(x, x_0)$は熱方程式

$$\frac{\partial}{\partial t} H_t(x, x_0) = -\frac{1}{2} \Delta_x H_t(x, x_0)$$

の解であるから，(2.1) を時刻tで微分すれば，

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{H}_t f(x_0) = -\frac{1}{2} \int \Delta f(x) H_t(x, x_0) dv$$

となる．その経路積分化である(3.2) を時刻 t に関して微分したとき，

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{H}_t f(x_0) = -\frac{1}{2} \int \Delta f(\gamma(t)) \exp\left(-\frac{\|\xi\|^2}{2}\right) \mathcal{D}\xi \tag{4.1}$$

が成立することを期待したい．

(3.2) をtに関して形式的に微分すると，

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{H}_t f(x_0) = \int \frac{\partial}{\partial t} \left(f(\gamma(t))\right) \exp\left(-\frac{\|\xi\|^2}{2}\right) \mathcal{D}\xi$$

を得る．ここでγはsとtをパラメータとすることに注意しよう．$s = t$において，$f(\gamma)$をtに関して微分すると

$$\frac{\partial f(\gamma)}{\partial t} = df\left(\frac{d}{ds} + \frac{\partial}{\partial t}\right) \tag{4.2}$$

となる．したがって，$\hat{\gamma}$のパラメータ t に関する変分 $\frac{\partial}{\partial t}$を考察する．

5 変分問題

X を $\hat{\gamma}$ に沿ったP のベクトル場とする．Levi-Civita 接続においては，歪率は0 であるので，

$$\begin{aligned} 2d\theta\left(\frac{d}{ds}, X\right) &= \omega(X)\theta\left(\frac{d}{ds}\right) = \omega(X)\xi_t, \\ 2d\omega\left(\frac{d}{ds}, X\right) &= 2d\omega\left(*\theta\left(\frac{d}{ds}\right), *\theta(X)\right) = 2d\omega\left(*\xi_t, *\theta(X)\right) \end{aligned} \tag{5.1}$$

である．

$\xi \in L^2([0, 1], \mathbb{R}^n)$ の変分$\delta\xi$に対応する, $\hat{\gamma}$ に沿ったベクトル場を δ とする．

命題5.1. $\theta(\delta)$, $\omega(\delta)$ は初期条件 $\theta(\delta) = 0$, $\omega(\delta) = 0$の下で．微分方程式

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}\theta(\delta) &= \delta\xi_t + \omega(\delta)\xi_t, \\ \frac{d}{ds}\omega(\delta) &= 2d\omega\left(*\xi_t, *\theta(\delta)\right) \end{aligned}$$

の解である．

証明. $\left[\frac{d}{ds}, \delta\right] = 0$ に注意して，

$$2d\theta\left(\frac{d}{ds}, \delta\right) = \frac{d}{ds}\theta(\delta) - \delta\theta\left(\frac{d}{ds}\right) = \frac{d}{ds}\theta(\delta) - \delta\xi_t,$$

また，

$$2d\omega\left(\frac{d}{ds}, \delta\right) = \frac{d}{ds}\omega(\delta) - \delta\omega\left(\frac{d}{ds}\right) = \frac{d}{ds}\omega(\delta)$$

なので，(5.1) から，命題を得る． □

$\xi_t = \frac{1}{\sqrt{t}}\xi\left(\frac{s}{t}\right)$について，容易な計算から，

$$s\frac{d\xi_t}{ds} + t\frac{\partial\xi_t}{\partial t} = -\frac{1}{2}\xi_t$$

である．ここで，

定義1. $\hat{\gamma}$ に沿ったベクトル場X を

$$X = 2\left(s\frac{d\xi_t}{ds} + t\frac{\partial\xi_t}{\partial t}\right) \tag{5.2}$$

で定義する．

命題5.2. $\theta(X)$, $\omega(X)$ は初期条件 $\theta(X) = 0$, $\omega(X) = 0$の下で，微分方程式

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}\theta(X) &= \xi_t + \omega(X)\xi_t, \\ \frac{d}{ds}\omega(X) &= 2d\omega\left(*\xi_t, *\theta(X)\right) \end{aligned}$$

の解である．

証明. 初期条件に関しては $s = 0$において, $X = \frac{\partial}{\partial t} = 0$であり，$X$の定義から$X\xi_t = -\xi_t, \left[\frac{d}{ds}, X\right] = 2\frac{d}{ds}$であるので，

$$2d\theta\left(\frac{d}{ds}, X\right) = \frac{d}{ds}\theta(X) - X\xi_t - \theta(\frac{d}{ds}) = \frac{d}{ds}\theta(X) + \xi_t$$

である．また，

$$2d\theta\left(\frac{d}{ds}, X\right) = \frac{d}{ds}\omega(X)$$

であるので，再び(5.1) から命題を得る． □

$s = t$ において，

$$\left(\frac{d}{ds} + \frac{\partial}{\partial t}\right) = \frac{1}{2t}X$$

であるので, $u = \hat{\gamma}(t) \in P$, $u : \mathbb{R}^n \to T_xM$, $\pi(u) = x$として，(4.2) は

$$\frac{\partial f(\gamma)}{\partial t} = \frac{1}{2t}df(u\theta(X)) \tag{5.3}$$

である．したがって，(3.2) のtに関する形式的な微分は,

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{H}_t f(x_0) = \frac{1}{2t}\int df(u\theta(X))\exp\left(-\frac{\|\xi\|^2}{2}\right)\mathcal{D}\xi,$$

となる．

$\hat{\gamma}$に沿った主束P のベクトル場X が経路積分の時刻t に関する微分に何らかの役割を果たすことが分かった．

次に, ϵをパラメータをもつ経路$e^{\epsilon}\xi \in L^2([0, 1], \mathbb{R}^n)$ のϵについての変分 $\frac{\partial}{\partial\epsilon}$ を考えよう．

命題5.3. $\theta\left(\frac{\partial}{\partial\epsilon}\right)$, $\omega\left(\frac{\partial}{\partial\epsilon}\right)$は初期条件 $\theta\left(\frac{\partial}{\partial\epsilon}\right) = 0$, $\omega\left(\frac{\partial}{\partial\epsilon}\right) = 0$の下で，微分方程式

$$\frac{d}{ds}\theta\left(\frac{\partial}{\partial\epsilon}\right) = \xi_t + \omega\left(\frac{\partial}{\partial\epsilon}\right)\xi_t,$$
$$\frac{d}{ds}\omega\left(\frac{\partial}{\partial\epsilon}\right) = 2d\omega\left(*\xi_t, *\theta\left(\frac{\partial}{\partial\epsilon}\right)\right)$$

の解である．

微分方程式の解の一意性から次の系を得る．

系5.4.

$$X = \frac{\partial}{\partial\epsilon}$$

証明.

$$\theta\left(\frac{d}{ds}\right) = e^{\epsilon}\xi_t$$

であるから,

$$\frac{\partial}{\partial\epsilon}\theta\left(\frac{d}{ds}\right) = e^{\epsilon}\xi_t$$

であるので，命題5.1 から系は従う． □

さらに, ξを級数に展開する事でXの性質を調べてみたい．

6 ξの級数展開

[2] では, ξを

$$\xi(s) = \sum_{\lambda=0}^{\infty}\xi_\lambda\phi_\lambda(s) \tag{6.1}$$

のように展開した．ここで，$\{\phi_\lambda\}$はヒルベルト空間$L^2([0, 1])$ の正規直交基底，$\xi_\lambda \in \mathbb{R}^n$がその係数となる．

(6.1) の有限和，

$$\xi(s) = \xi_0\phi_0(s) + \xi_1\phi_1(s) + \cdots + \xi_\lambda\phi_\lambda(s)$$

および，

$$\xi_t(s) = \frac{1}{\sqrt{t}}\left(\xi_0\phi_0\left(\frac{s}{t}\right) + \xi_1\phi_1\left(\frac{s}{t}\right) + \cdots + \xi_\lambda\phi_\lambda\left(\frac{s}{t}\right)\right)$$

について，微分方程式(3.1) の解曲線$\hat{\gamma}(\xi)$の，係数 $\xi_\lambda \in \mathbb{R}^n$ による変分を考える．ユークリッド空間$\mathbb{R}^n$ の正規直交基底 $\{e_i\}$ に対し，$\xi_\lambda = \sum_i \xi_\lambda^i e_i$ とする．命題5.1 から，$\theta\left(\frac{\partial}{\partial\xi_\lambda^i}\right), \omega\left(\frac{\partial}{\partial\xi_\lambda^i}\right)$ は初期条件$\theta\left(\frac{\partial}{\partial\xi_\lambda^i}\right) = 0$, $\omega\left(\frac{\partial}{\partial\xi_\lambda^i}\right) = 0$ の下で．微分方程式

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}\theta\left(\frac{\partial}{\partial\xi_\lambda^i}\right) &= \frac{\partial\xi_t}{\partial\xi_\lambda^i} + \omega\left(\frac{\partial}{\partial\xi_\lambda^i}\right)\xi_t,\\ \frac{d}{ds}\omega\left(\frac{\partial}{\partial\xi_\lambda^i}\right) &= 2d\omega\left(*\xi_t, *\theta\left(\frac{\partial}{\partial\xi_\lambda^i}\right)\right)\end{aligned} \tag{6.2}$$

の解である．$Y = \sum \xi_\lambda^i \frac{\partial}{\partial\xi_\lambda^i}$ とすると，$\sum \xi_\lambda^i \frac{\partial\xi_t}{\partial\xi_\lambda^i} = \xi_t$ であるから，$\theta(Y)$，$\omega(Y)$は初期条件 $\theta(Y) = 0$, $\omega(Y) = 0$ の下で，微分方程式

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}\theta(Y) &= \xi_t + \omega(Y)\xi_t,\\ \frac{d}{ds}\omega(Y) &= 2d\omega\left(*\xi_t, *\theta(Y)\right)\end{aligned}$$

の解である．再び微分方程式の解の一意性から，次が成立する．

命題6.1.

$$X = \sum \xi_\lambda^i \frac{\partial}{\partial\xi_\lambda^i}.$$

さて，係数 $\xi_\lambda \in \mathbb{R}^n$ を積分変数として，微分形式 $\hat{d}\xi_\lambda$ を

$$\int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\frac{|\xi_\lambda|^2}{2}\right)\hat{d}\xi_\lambda = 1$$

となるように正規化した

$$\hat{d}\xi_\lambda = \frac{d\xi_\lambda}{(\sqrt{\pi})^n}$$

と定義する．(3.2) を

$$\mathcal{H}_t^\lambda f(x_0) = \int f(\gamma(t))\exp\left(-\frac{|\xi_0|^2 + |\xi_1|^2 + \cdots + |\xi_\lambda|^2}{2}\right)\hat{d}\xi_0\hat{d}\xi_1\cdots\hat{d}\xi_\lambda \tag{6.3}$$

のような無限回の積分で表現したいのであるが，ひとまず，有限回の積分$\mathcal{H}_t f$について，時刻tに関する微分を考察しよう．

(5.3) と命題6.1 から，

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{H}_t^\lambda f(x_0) = \frac{1}{2t}\int\sum \xi_\lambda^i d\hat{f}\left(*\theta\left(\frac{\partial}{\partial\xi_\lambda^i}\right)\right)\exp\left(-\frac{|\xi_0|^2 + |\xi_1|^2 + \cdots + |\xi_\lambda|^2}{2}\right)\hat{d}\xi_0\hat{d}\xi_1\cdots\hat{d}\xi_\lambda$$

であり，部分積分によって，

$$\int \xi^i f(\xi)\exp\left(-\frac{|\xi|^2}{2}\right)\hat{d}\xi = \int\frac{\partial f}{\partial\xi^i}(\xi)\exp\left(-\frac{|\xi|^2}{2}\right)\hat{d}\xi$$

であるので,

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{H}_t^{\lambda} f(x_0) = \frac{1}{2t}\int\sum\frac{\partial}{\partial\xi_\lambda^i}\left(d\hat{f}\left(*\theta\left(\frac{\partial}{\partial\xi_\lambda^i}\right)\right)\right)\exp\left(-\frac{|\xi_0|^2+|\xi_1|^2+\cdots+|\xi_\lambda|^2}{2}\right)\hat{d}\xi_0\hat{d}\xi_1\cdots\hat{d}\xi_\lambda$$

となる．被積分関数の fに関係する部分,

$$d\hat{f}\left(*\theta\left(\frac{\partial}{\partial\xi_\lambda^i}\right)\right)= L_{*\theta\left(\frac{\partial}{\partial\xi_\lambda^i}\right)}$$

は，主束P のファイバー上で一定なので,

$$\sum\frac{\partial}{\partial\xi_\lambda^i}\left(d\hat{f}\left(*\theta\left(\frac{\partial}{\partial\xi_\lambda^i}\right)\right)\right)=\sum L^2_{*\theta\left(\frac{\partial}{\partial\xi_\lambda^i}\right)} f$$

を得る．

参考文献

[1] 藤原　大輔, ファインマン経路積分の数学的方法, シュプリンガー･フェアラーク東京, (1999)

[2] T Hiroshima, A Computation of Feynman Path Integral, NUCB Journal of Economics and Information Science Vol. 54 No. 2, (2010) 127-134.