

# サブプライム問題が Value-at-Risk 推定に与えた影響

山分俊幸

## 1 はじめに

2007年2月初めに、イギリスのHSBCが、サブプライム関連MBSの償却費用として100億ドル以上を2006年決算に計上することを公表した。サブプライム問題が顕在化したのは、この時点からであるといわれている。その後、サブプライム問題で打撃を受けた投資銀行やヘッジファンドが株を手放すことで、世界中で株価の暴落とその反動の急騰が繰り返されることになった。日本においては、円キャリートレードの解消による急激な円高の影響も加わり、株価が乱高下を繰り返すようになった。株価が乱高下する状態とは、株価収益率のボラティリティが高まっている状態である。図1.1は、2004年8月26日から2010年8月26日までのTOPIXリターンの20日ヒストリカルボラティリティの推移を表している。図1.1によると、2007年2月以前は1%未満を示すことが多かったTOPIXリターンの20日ヒストリカルボラティリティが、2007年2月以降は多くの場合で1%以上を示していることがわかる。また、2008年9月のリーマンショック直後に、TOPIXリターンの20日ヒストリカルボラティリティが急上昇していることがわかる。よって、サブプライム問題が日本の株価変動に与えた影響は、リーマンショック直後に如実に現れているといえる。株価収益率のボラティリティが高まっていることは、株の市場リスクが高まっていることを意味する。つまり、サブプライム問題によって、株の市場リスクが急激に高まったといえる。そして、市場リスクの急激な高まりは、市場リスク管理を困難にすると予想される。

現在、市場リスク管理には Value-at-Risk (VaR) が幅広く用いられている。VaR は、ある一定の確率範囲内で起こりうるポートフォリオの最大損失額として表され、この確率が99%のVaRを99%VaR、95%のVaRを95%VaRと呼ぶ。VaRは、JPモルガンのCEOであったD.Weatherstronが自社のポートフォリオ全体がさらされている市場リスクの大きさを一括して知りたいと考えたことから開発されたリスク指標である。 $\{r_t\}_{t=1}^T$ をリスクファクターの時系列データとし、Tをデータが存在する期間、 $\Omega_t$ を時点tで利用可能な情報とすると、時点tにおける $100(1-\theta)\%VaR$ は以下の式を満たす値である。

$$\Pr[r_t < -VaR_t | \Omega_t] = \theta \quad \theta \in (0, 1).$$

市場リスクの急激な高まりによって、市場リスク管理が困難になるとは、このVaRの正確な推定を行うことが困難になることを意味する。

金融機関では、取り扱いの簡便さから、VaRの推定に分散共分散法とヒストリカル法が広く用いられてきた。分散共分散法最大の特徴は、リスクファクターの正規分布性を仮定している点にある。この仮定を置くことで、分散共分散法を用いたVaRの推定が非常に簡単になっている。しかし、リスクファクターの従う確率分布は、一般に正規分布より分布の裾が厚い。その

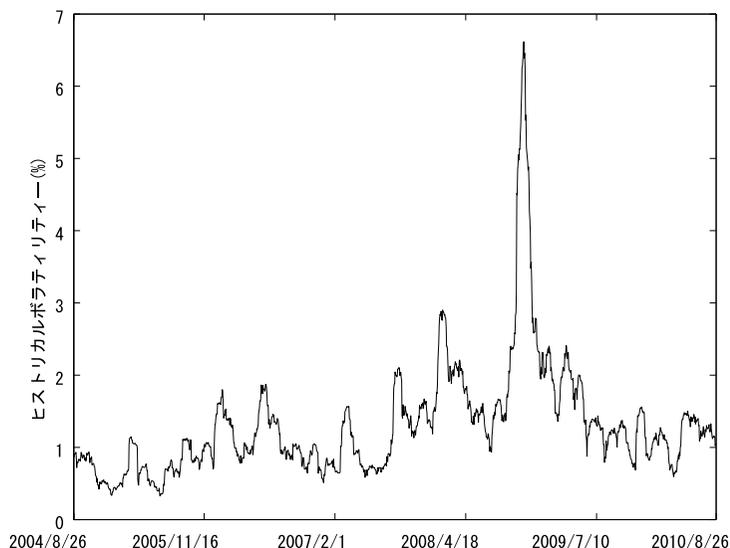


図 1.1: TOPIX リターン の 20 日ヒストリカルボラティリティーの推移

ため、分散共分散法を用いた VaR の推定では、99%VaR でリスクを過小評価するケースが多い。また、非線形リスクを持つオプションのリスク管理には使えない問題点もある。一方、ヒストリカル法を用いた VaR の推定は、リスクファクターの分布を仮定しないので、非線形リスクを持つオプションのリスク管理や非正規性の分布を持つリスクファクターのリスク管理にも使える。また、ヒストリカル法を用いた VaR の推定は、単純に全てのデータを用いて標本分位点を計算するので、計算としては非常に簡単である。しかし、ヒストリカル法では、過去に生じたリスクファクターの変動と同様の変動が将来に起こる確率を、過去のデータそれぞれで一様に等しいとしているため、リスクファクターの直近の変動の特徴を捉えにくいという問題がある。

現在、多くの金融機関では、VaR の推定方法を分散共分散法からヒストリカル法に移行させてきている。その主な理由は、バックテストと呼ばれる VaR の推定精度評価において、ヒストリカル法の結果が分散共分散法の結果に比べて勝っているからである。しかし、ヒストリカル法には上記問題が存在する。そのため、ヒストリカル法には、リスクファクターの直近の変動をより明確に取り込むための改良手法が提案されている。Boudoukh, Richardson and Whitelaw (1998) は、リスクファクターの直近の変動を重視するように、過去に生じたリスクファクターの変動と同様の変動が将来に起こる確率を変化させる手法を提案している。また、Hull and White (1998)、Barone-Adesi, Giannopoulos and Vosper (1999) は、リスクファクターの直近の変動を反映するように、過去のリスクファクターの大きさを修正する手法を提案している。

山分 (2007) では、線形 Quantile Regression (以下、線形 QR 法) を用いて TOPIX の VaR を推定している。そして、得られた VaR の推定精度を、上記特徴を持つヒストリカル法を用いた VaR の推定精度と比較し、線形 QR 法が、株式ポートフォリオの 99%VaR と 95%VaR どちらにおいても、ヒストリカル法よりも精度の良い VaR 推定方法であることを示している。

線形 QR 法は、被説明変数の分位点を説明変数で回帰する手法で、Koenker and Bassett (1978) によって提唱され、統計分野において用いられているノンパラメトリック推定 (分布を仮定しない推定) 手法の一つである。線形 QR 法によって、VaR は、 $\beta$  を  $p$  次元のパラメータとし、

$x_t$  で表される  $t - 1$  時点で利用可能な情報から選んだ  $p$  次元の説明変数を用いて、

$$VaR_t = x_t' \beta \quad (1)$$

と表される。

ヒストリカル法が VaR の推定に過去のリターンデータのみを用いるのに対して、線形 QR 法による VaR の推定では、(1)式で示されているように、過去のリターンデータだけでなく、様々なデータを用いることができる。よって、用いるデータをうまく選択することができれば、線形 QR 法による VaR の推定は、リターンのみを用いるヒストリカル法による VaR の推定に比べて、精度の良いものにすることができる。山分 (2007) では、1 日のラグ付きの TOPIX リターン、ダウリターン、ならびに TOPIX リターンの 20 日ヒストリカルボラティリティーによって線形 QR 法を用いた VaR を推定することで、線形 QR 法が、株式ポートフォリオの 99%VaR と 95%VaR どちらにおいても、ヒストリカル法よりも精度の良い VaR 推定方法であることを示している。

本論文では、ヒストリカル法、リスクファクターの直近の変動を考慮できるようヒストリカル法を改良した、BRW 法、HW 法、FHS 法そして線形 QR 法、以上の 5 手法で推定される TOPIX の VaR の性質を比較する。比較する期間は、2007 年 2 月 1 日から 2010 年 8 月 26 日までである。なお、線形 QR 法の説明変数としてリスクファクターの直近の変動を表す指標を用いるため、本論文の線形 QR 法はリスクファクターの直近の変動を考慮した VaR 推定手法になっている。そして本論文の目的は、サブプライム問題によって株の市場リスクが急激に高まっていった過程で、上記 5 手法で推定される VaR の性質がどのように変化したかを分析し、株の市場リスクが急激に高まっていくような状況において実務的での利用可能性の高い VaR 推定手法はどのようなものであるかを考察することである。

本論文の構成は以下の通りである。まず第 2 節で VaR の定義、推定手法ならびに推定精度評価方法について説明をする。第 3 節では、TOPIX に関して、ヒストリカル法、BRW 法、HW 法、FHS 法、線形 QR 法の 99%VaR と 95%VaR を推定する。そして、推定精度、VaR の年率ボラティリティー、VaR の超過事象の相関、VaR の相対的水準に関して、上記 5 手法で推定された VaR を比較する。比較する期間は、2007 年 2 月 1 日から 2010 年 8 月 26 日までである。第 4 節では、結論と今後の課題を述べる。

## 2 VaR の定義、推定手法、推定精度評価方法

本節では、本論文で用いる VaR の定義、推定手法、推定精度評価方法について説明する。

### 2.1 VaR の定義

VaR とは、ある一定の確率範囲内で起こりうるポートフォリオの最大損失額である。VaR は金額で表されずリターンの大きさを表されることも多い。よって本論文では、VaR をリターンの大きさを表すこととする。したがって、 $r_t$  を時点  $t$  のリターンとし、 $\Omega_{t-1}$  を時点  $t - 1$  で利用可能な情報とすると、時点  $t$  における  $100(1 - \theta)\%$  VaR は (2) 式を満たす  $VaR_t$  である。

$$\Pr[r_t < -VaR_t | \Omega_{t-1}] = \theta \quad \theta \in (0, 1). \quad (2)$$

## 2.2 VaR の推定手法

まず本論文で推定に用いるヒストリカル法について、具体的な推定手順を述べる。次に、ヒストリカル法を改良し、リターンの直近の変動を VaR の変化に反映させやすいようにした手法として、Boudoukh, Richardson and Whitelaw (1998) の手法 (以下 BRW 法)、Hull and White (1998) の手法 (以下 HW 法)、Barone-Adesi, Giannopoulos and Vosper (1999) の手法 (以下 FHS 法<sup>1</sup>) を紹介する。最後に、線形 QR 法について説明する。

### 2.2.1 ヒストリカル法

ヒストリカル法では、過去に発生したリターンをサンプルリターンデータとする。そして、サンプルリターンデータが将来同じ確率で発生すると考え、経験分布を用いて VaR を推定する。ヒストリカル法による VaR 推定手順は以下の通りである。

現時点を  $t-1$  とし、 $t-1, t-2, \dots, t-i$  時点 ( $t > i$ ) のリターンデータ ( $r_{t-1}, r_{t-2}, \dots, r_{t-i}$ ) をサンプルリターンデータとする。

サンプルリターンデータ ( $r_{t-1}, r_{t-2}, \dots, r_{t-i}$ ) を昇順に並び替えた順序統計量を ( $r'_1, r'_2, \dots, r'_i$ ) とし、それぞれの順序統計量が発生する確率を等しく  $\frac{1}{i}$  とする。VaR の信頼水準を  $100(1-\theta)\%$  とすると、ヒストリカル法を用いて推定した時点  $t$  における VaR は、ある整数  $k$  を用いて (3) 式、(4) 式で表される。

- $k \leq \theta i < k+1$  と表せるとき、

$$VaR_t = - \{(\theta i - k)r'_{k+1} + (k+1 - \theta i)r'_k\}. \quad (3)$$

- $\theta i = k$  と表せるとき、

$$VaR_t = - r'_k. \quad (4)$$

上記方法が一般的なヒストリカル法である。

### 2.2.2 BRW 法

ヒストリカル法では、サンプルリターンデータが将来同じ確率で発生すると考える。BRW 法では、直近のサンプルリターンデータほど、発生する確率が高くなるように、各サンプルリターンデータの発生確率に重み付けを行うことで、リターンの直近の変動を VaR の変化に反映させやすいようにしている。BRW 法による VaR 推定手順は以下の通りである。

現時点を  $t-1$  とし、 $t-1, t-2, \dots, t-i$  時点 ( $t > i$ ) のリターンデータ ( $r_{t-1}, r_{t-2}, \dots, r_{t-i}$ ) をサンプルリターンデータとする。

(5) 式で表される  $w_j$  を  $t-j$  時点 ( $1 \leq j \leq i$ ) のサンプルリターンデータ  $r_{t-j}$  が将来発生する確率とする。

$$w_j = \frac{1-\lambda}{1-\lambda^i} \lambda^{j-1}. \quad (5)$$

ここで  $0 < \lambda < 1$

<sup>1</sup> Barone-Adesi, Giannopoulos and Vosper (1999) では、提案した手法をフィルタ付きヒストリカル・シミュレーション (FHS) と呼んだ。

このとき、サンプルリターンデータ  $(r_{t-1}, r_{t-2}, \dots, r_{t-i})$  それぞれが発生する確率  $(w_1, w_2, \dots, w_i)$  は、過去のサンプルリターンデータにさかのぼるほど減少していくことがわかる。また、(6)式から、確率の合計が<sup>2</sup>1 になることも確認できる。

$$\sum_{j=1}^i w_j = \frac{1-\lambda}{1-\lambda^i} \sum_{j=1}^i \lambda^{j-1} = 1. \quad (6)$$

サンプルリターンデータ  $(r_{t-1}, r_{t-2}, \dots, r_{t-i})$  を昇順に並び替えた順序統計量を  $(r'_1, r'_2, \dots, r'_i)$  とし、それぞれの順序統計量が発生する確率を  $(w'_1, w'_2, \dots, w'_i)$  とする。VaR の信頼水準を  $100(1-\theta)\%$  とすると、BRW 法を用いて推定した時点  $t$  における VaR は(7)式、(8)式で表される<sup>2</sup>。

- $\sum_{j=1}^k w'_j \leq \theta < \sum_{j=1}^{k+1} w'_j$  のとき、

$$VaR_t = - \frac{(\theta - \sum_{j=1}^k w'_j) r'_{k+1} + (\sum_{j=1}^{k+1} w'_j - \theta) r'_k}{w'_{k+1}}. \quad (7)$$

- $w'_1 \geq \theta$  のとき、

$$VaR_t = -r'_1. \quad (8)$$

### 2.2.3 HW 法

ヒストリカル法では、サンプルリターンデータとして、過去に発生したリターンをそのまま用いている。HW 法では、リターンの直近の変動が VaR の変化に反映するように、過去に発生したリターンを修正したものをサンプルリターンデータとして用いる。HW 法による VaR 推定手順は以下の通りである。

リターン  $r_t$  のボラティリティが指数型加重移動平均で計算されるとすると、リターン  $r_t$  は(9)式、(10)式で表される。

$$r_t = \sigma_t \epsilon_t, \quad (9)$$

$$\sigma_t^2 = \lambda \sigma_{t-1}^2 + (1-\lambda) r_{t-1}^2. \quad (10)$$

ここで、 $\epsilon_t$  は、互いに独立で同一の分布（平均 0、分散 1）に従う確率変数とし、 $\lambda$  は  $0 < \lambda < 1$  を満たす定数とする。現時点を  $t-1$  とし、 $t-1, t-2, \dots, t-i$  時点 ( $t > i$ ) のリターンデータ  $(r_{t-1}, r_{t-2}, \dots, r_{t-i})$  をサンプルリターンデータとする。通常行われるように  $\sigma_{t-i} = \frac{1}{i} \sum_{j=1}^i r_{t-j}^2$  とすると、(10)式によって逐次的に  $(\sigma_{t-i+1}, \sigma_{t-i+2}, \dots, \sigma_t)$  が求まる。

(9)式より、VaR を推定するためには、 $\epsilon_t$  の分布を特定する必要がある。HW 法では、 $\epsilon_t$  が、過去の実現値  $\epsilon_{t-j}$  ( $j=1, 2, \dots, i$ ) から得られる経験分布に従うとする。ここで、 $\epsilon_{t-j}$  は(11)式により計算される。

<sup>2</sup> この方法は、安藤（2004）が用いた方法であり、原論文とはやや異なっている。原論文とやや異なる方法を用いる理由は、安藤（2004）を参照。

$$\epsilon_{t-j} = \frac{r_{t-j}}{\sigma_{t-j}}. \quad (11)$$

手順で得られたサンプルリターンデータと推定ボラティリティを用いて、

$$r_{t-j}^* = \frac{r_{t-j}}{\sigma_{t-j}} \sigma_t, \quad j = 1, 2, \dots, i, \quad (12)$$

より、修正したリターン  $(r_{t-1}^*, r_{t-2}^*, \dots, r_{t-i}^*)$  を得る。(12)式は、過去のリターンに  $\frac{\sigma_t}{\sigma_{t-j}}$  を乗じており、リターンの直近の変動が VaR の変化に反映するような形になっている。

修正したリターン  $(r_{t-1}^*, r_{t-2}^*, \dots, r_{t-i}^*)$  を用いて、通常のヒストリカル法と同じ手順により、VaR を推定する。

### 2.2.4 FHS 法

FHS 法は、ボラティリティ推定に GARCH モデルを利用する以外は、HW 法と同様である。FHS 法は、(13)式、(14)式のように、リターン  $r_t$  が GARCH (1,1) モデルに従うと仮定する<sup>3</sup>。

$$r_t = \sigma_t \epsilon_t, \quad (13)$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha r_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2. \quad (14)$$

ここで、 $\epsilon_t$  は、互いに独立で同一の分布（平均 0、分散 1）に従う確率変数とし、 $\alpha$ 、 $\beta$ 、 $\omega$  はパラメータである。

本論文では、安藤（2004）と同様に、GARCH モデルのパラメータ推定に擬似最尤法を用いている。FHS モデルを用いた VaR 推定では、ボラティリティの定式化以後の手順は HW 法と全く同じである。

### 2.2.5 線形QR 法

Koenker and Bassett（1978）は、 $r_t$  の  $\theta$  分位点を<sup>3</sup>、(15)式の解  $\beta$  を用いて、 $x'_i \beta$  となることを示した。

$$\min_{\beta \in \mathbb{R}^p} \frac{1}{i} \left\{ \sum_{j \in \{j: r_j \geq x'_j \beta\}} \theta |r_j - x'_j \beta| + \sum_{j \in \{j: r_j < x'_j \beta\}} (1-\theta) |r_j - x'_j \beta| \right\} \quad j=t-1, t-2, \dots, t-i$$

$$\min_{\beta \in \mathbb{R}^p} \frac{1}{i} \sum_{j=t-i}^{t-1} [\theta - I(r_j < x'_j \beta)] [r_j - x'_j \beta]. \quad (15)$$

ここで  $(r_{t-1}, r_{t-2}, \dots, r_{t-i})$  をサンプルリターンデータ、 $x_j$  を  $j-1$  時点で利用可能な情報から選んだ  $p$  次元の説明変数とし、 $I(\cdot)$  は定義関数を表す。

線形 QR 法による VaR の推定では、 $g(y|x)$  を  $y$  の条件付密度関数としたとき  $(1-\theta)\% \text{VaR}$  について(16)式が成り立つ。

<sup>3</sup> 3 本論文では安藤（2004）と同様に、簡単化のため GARCH (1, 1) モデルを用いているが、原論文では、ARMA-GARCH (1, 1) モデルを仮定している。

$$\theta = \int_{-\infty}^{x'\beta} g(\lambda|x) d\lambda. \quad (16)$$

Koenker and Bassett (1978) は、(15)式で推定されたパラメータ  $\beta$  が一貫性や漸近正規性をもつことを証明した。(15)式からわかるように、線形 QR 法では、ヒストリカル法と同様に、分布を特定せず直接分位点を求めるところに特徴がある。

線形 QR 法は、ヒストリカル法と同様に、ポートフォリオの VaR 推定にも用いることができる。いま、 $k$  個の資産について、 $j$  日目のリターンが

$$R_j = (r_{1,j}, \dots, r_{k,j})'$$

とする。また、 $k$  個の資産からなるポートフォリオの投資比率を

$$A = (a_1, \dots, a_k)$$

とする。このとき  $j$  日目のポートフォリオリターン  $\hat{r}_j$  は、

$$\hat{r}_j = AR_j$$

となる。この手順で構築したポートフォリオリターンデータ  $\hat{r}_{t-1}, \dots, \hat{r}_{t-i}$  に対して線形 QR 法を用いることで、ポートフォリオの VaR を推定することができる。

### 2.3 VaR の推定精度評価方法

VaR の推定精度評価方法としては、バックテストが最も一般的である。バックテストとは、あるバックテスト期間に含まれるそれぞれの日のリターンが、その日以前のデータを用いて推定された VaR を超過していたかどうかを調査し、超過比率が 99%VaR の理想値 1%、95%VaR の理想値 5% からどれだけ乖離しているかをみることで、VaR の推定の精度を評価する方法である。具体例として、過去 1000 日分のデータから次の日の VaR を推定し、バックテスト期間を 1500 日とする場合を考える。ここで現時点  $t-1$  をバックテスト期間最終日とすると、バックテスト期間初日は時点  $t-1500$  となる。そして、まず時点  $t-1501$  から時点  $t-2500$  までの過去 1000 日分のデータを用いて時点  $t-1500$  の VaR を推定し、時点  $t-1500$  のリターンがその日の VaR を超過していたかどうかを調べる。次に、時点  $t-1500$  から時点  $t-2499$  までの過去 1000 日分のデータを用いて時点  $t-1499$  の VaR を推定し、時点  $t-1499$  のリターンがその日の VaR を超過していたかどうかを調べる。このようにして、時点  $t-1500, t-1499, \dots, t-1$  それぞれについて、その日のリターンが過去 1000 日のデータを用いて推定した VaR を超過していたかどうかを調べ、1500 日間の超過回数を 1500 で割れば、超過比率が計算される。

## 3 推定結果

本論文では、VaR の推定の為に、1996 年 11 月 6 日から 2010 年 8 月 26 日までの TOPIX の次リターンデータを用いる。表 3.1 は、本論文で用いる TOPIX リターンデータ全体の基本統計量を表している。安藤 (2004) では、実際に VaR 推定手法をリスク管理実務で利用する場合に、①「VaR が損失を適切に捉えていること」が最も重要であり、次にその条件が満たされたうえ

で、②「VaRの変動が過度に大きくないこと」が実務上要請されるとしている。さらにその上で、③「リターンがVaRを超過する事象に相関がないこと」ならびに、④「他の手法で推定されるVaRと比較してVaRの相対的水準が低いこと」が満たされれば、実務上さらに好ましいとしている。本論文でも安藤(2004)と同様に考え、①～④の基準について、ヒストリカル法、BRW法、HW法、FHS法、線形QR法による99%VaR、95%VaRを比較する。第1章で述べたとおり、線形QR法では、様々な指標をVaRの推定に取り込むことができる。本論文では、それぞれ1日のラグつきのTOPIXリターン、ダウリターン、円ドルレートリターンならびにTOPIXリターンの20日ヒストリカルボラティリティ<sup>4</sup>を用いて、線形QR法によりTOPIXの99%VaR、95%VaRを推定する。上記4つの指標を用いる理由は、TOPIXの将来を予測する上で、これらの指標が投資家にとって特に重要視されているからである。

表 3.1:TOPIX リターンの基本統計量

	TOPIX
平均	0 .0169
標準偏差	1 .3949
最大	12 .8646
最小	10 .0071
歪度	0 .2386
尖度	8 .6885

\* データは全て % 表記に変換したものをを用いている

### 3.1 バックテストに関する結果

本論文では、各手法で1500日のバックテスト期間をそれぞれ一致させてバックテストを行っている。そして、線形QR法を用いたVaRの推定では、最初の20日分をTOPIXの20日ヒストリカルボラティリティの計算のみに使い、過去1019日分のデータから次の日のVaRを推定している。そしてヒストリカル法、BRW法、HW法、FHS法では、過去1000日分のデータから次の日のVaRを推定している。VaRの推定に用いる過去のデータ数については、ヒストリカル法では、金融機関でよく用いられる値を使い、BRW法、HW法、FHS法、線形QR法では、ヒストリカル法とデータの観測期間が一致するように決定した。

さらに本論文では、1回目のバックテスト期間を2000年12月26日から2007年2月1日までの1500営業日とし、2回目のバックテスト期間を2000年12月27日から2007年2月2日までの1500営業日とするように、バックテスト期間を1営業日ずつずらし、875回のバックテストを行っている。そして、このバックテスト期間の最終日が、アメリカでサブプライム問題が顕在化した2007年2月以降になるようにしている。

図3.1は、この875回のバックテストから得られるTOPIXの99%VaRの超過比率の推移を表している。また、図3.2は、TOPIXの95%VaRの超過比率の推移を表している。図3.1によると、ヒストリカル法を用いて推定した99%VaRの精度が、2008年後半以降は1.8%前後で、理想値の1%を大きく上回っていることがわかる。また、BRW法、HW法、FHS法、線形QR法

<sup>4</sup> 過去20日分のTOPIXリターンから計算したヒストリカルボラティリティ

を用いて推定した 99%VaR の精度に大きな差はなく、理想値 1% からの乖離も 0.4% 以内と低いことがわかる。よって 99%VaR では、リーマンショック以降の市場リスクの高まりをヒストリカル法では正確に捉えることができず、リスクを異常に過小評価してしまっている一方で、BRW 法、HW 法、FHS 法、線形 QR 法では、リスクの高まりにしっかりと対応できているといえる。

表 3.2 は、バックテストから得られる 99%VaR の超過比率と理想値との乖離の大きさの平均値を示している。表 3.2 によると、平均して FHS 法の推定精度が最も良く、HW 法、線形 QR 法、BRW 法、ヒストリカル法の順に推定精度が悪くなっていくことがわかる。そして特に、図 3.1 よりわかる通り、ヒストリカル法の推定精度の平均が飛びぬけて高いことがわかる。

図 3.2 によると、ヒストリカル法を用いて推定した 95%VaR の精度が、2008 年前半までは、4% 前後で理想値の 5% を大きく下回り、2008 年後半以降はほぼ全ての期間で 7% 以上で理想値の 5% を大きく上回っていることがわかる。また、BRW 法、FHS 法を用いて推定した 95%VaR の精度に関しては、理想値 5% から乖離している期間が長いが、乖離は 1% 以内とそれほど大きくないことがわかる。HW 法、線形 QR 法を用いて推定した 95%VaR の精度に関しては大きな差がなく、HW 法の一部の期間を除いて、理想値 5% からの乖離も 0.5% 以内と低いことがわかる。よって 95%VaR の場合も 99%VaR の場合と同様に、リーマンショック以降の市場リスクの高まりをヒストリカル法では正確に捉えることができず、リスクを異常に過小評価してしまっている一方で、BRW 法、HW 法、FHS 法、線形 QR 法では、リスクの高まりにしっかりと対応できているといえる。

表 3.3 は、バックテストから得られる 95%VaR の超過比率と理想値との乖離の大きさの平均値を示している。表 3.2 によると、平均して HW 法と線形 QR 法の推定精度が良く、次に BRW 法と FHS 法、最後にヒストリカル法の順に推定精度が悪くなっていくことがわかる。そして 99%VaR と同じく、ヒストリカル法の推定精度の平均が飛びぬけて高いことがわかる。

表 3.2: TOPIX99%VaR の超過比率と理想値との乖離の大きさの平均値

	平均値
ヒストリカル法	0.5708
BRW 法	0.1839
HW 法	0.1105
FHS 法	0.0643
線形 QR 法	0.1513

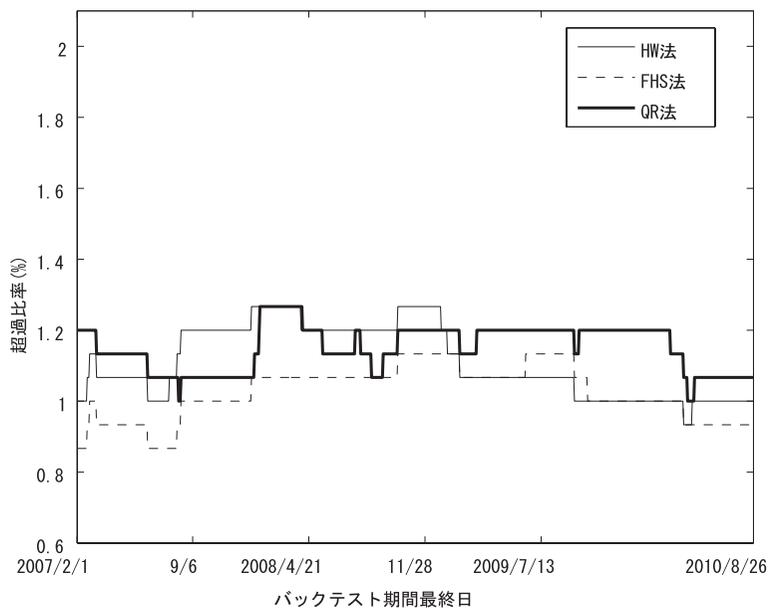
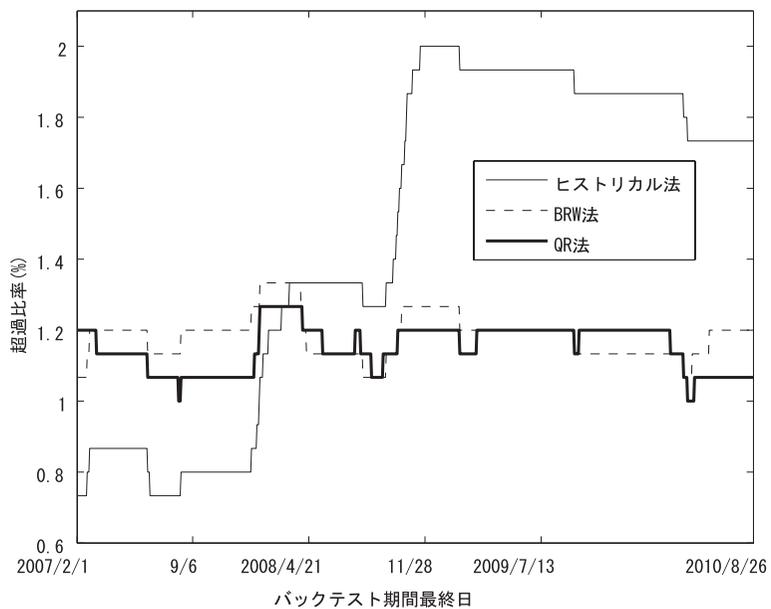


図 3.1: TOPIX 99% VaR の超過比率の推移

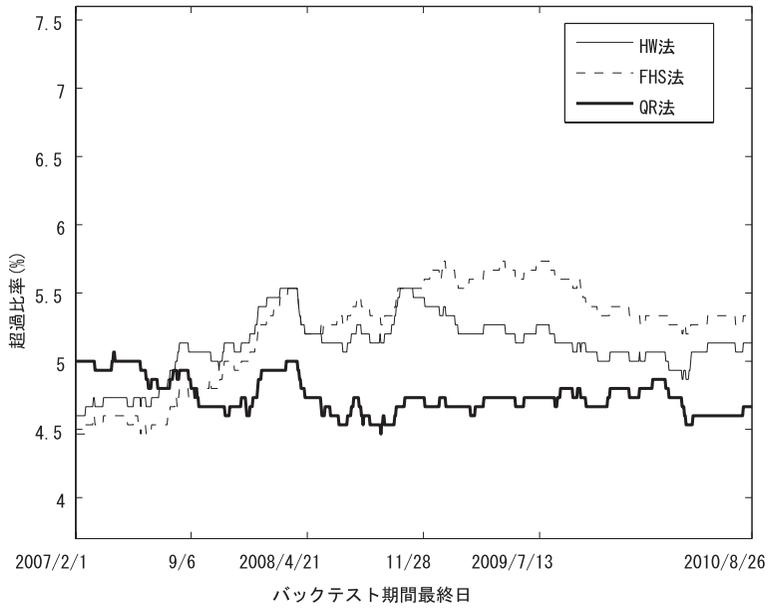
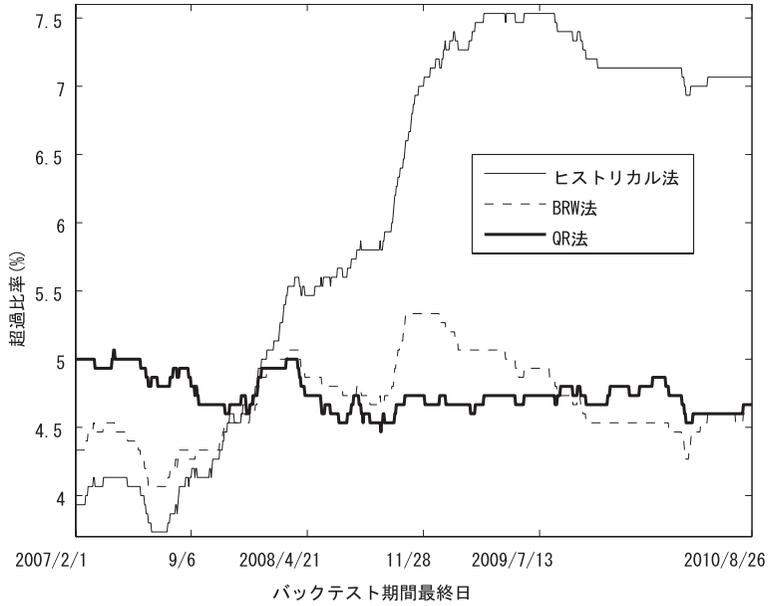


図 3.2: TOPIX 95% VaR の超過比率の推移

表 3.3: TOPIX95%VaR の超過比率と理想値との乖離の大きさの平均値

	平均値
ヒストリカル法	1.5079
BRW 法	0.3678
HW 法	0.2005
FHS 法	0.4042
線形 QR 法	0.2555

### 3.2 VaR の年率ボラティリティに関する結果

実際に VaR 推定手法をリスク管理実務で利用する場合に、②「推定される VaR の変動が過度に大きくないこと」が重要視される理由は、リスク管理において、VaR の大きさをポジションの保有枠に用いることがあるためである。本論文では、推定される VaR の変動の大きさを比較するため、各手法を用いて推定される VaR の年率ボラティリティを比較する。

図 3.3 は、875 回のバックテスト期間に含まれる 99%VaR の年率ボラティリティを各バックテスト期間について計算した結果を表している。また、図 3.4 は、875 回のバックテスト期間に含まれる 95%VaR の年率ボラティリティを各バックテスト期間について計算した結果を表している。図 3.3 によると、全バックテスト期間を通じて、ヒストリカル法の年率ボラティリティが最も低いことがわかる。ヒストリカル法以外の手法に関しては、2008 年前半までは年率ボラティリティに大きな差はなく、10%～15% 間で、BRW 法、FHS 法、線形 QR 法、HW 法の順に高くなっていることがわかる。2008 年後半以降は、全手法で年率ボラティリティが跳ね上がっているが、線形 QR 法と比較して、BRW 法、FHS 法、HW 法の上がり幅が大きく、2009 年前半以降は、約 5% の間隔で、線形 QR 法、BRW 法、FHS 法、HW 法の順に年率ボラティリティが高くなっていることがわかる。よって、リーマンショック後の市場リスクの高まりとその後の沈静化に対応する形で、各手法で推定される 99%VaR の変動が激しくなっていることがわかる。

図 3.4 によると、95%VaR の場合も 99%VaR の場合と同様に、全バックテスト期間を通じて、ヒストリカル法の年率ボラティリティが最も低いことがわかる。ヒストリカル法以外の手法に関しては、ほとんどのバックテスト期間で、年率ボラティリティの差が 5% 以内に収まっており、大きな差はない。そして、BRW 法、FHS 法、線形 QR 法、HW 法の順に高くなっていることがわかる。リーマンショック後に変動が激しくなっているのは、95%VaR の場合も 99%VaR の場合と同様である。

以上の結果より、99%VaR、95%VaR とともに「推定される VaR の変動が過度に大きくないこと」という観点からは、ヒストリカル法が VaR 推定手法として最も望ましいといえる。

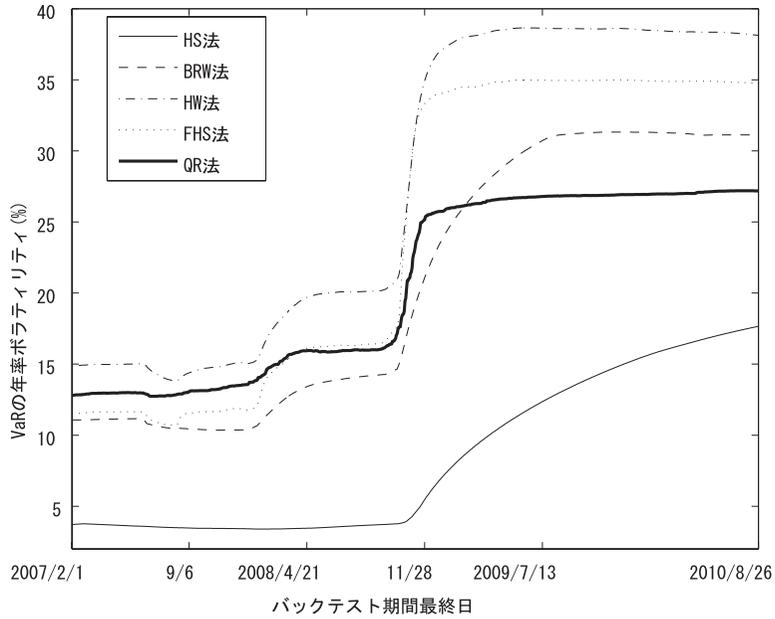


図 3.3:TOPIX99%VaR の年率ボラティリティの推移

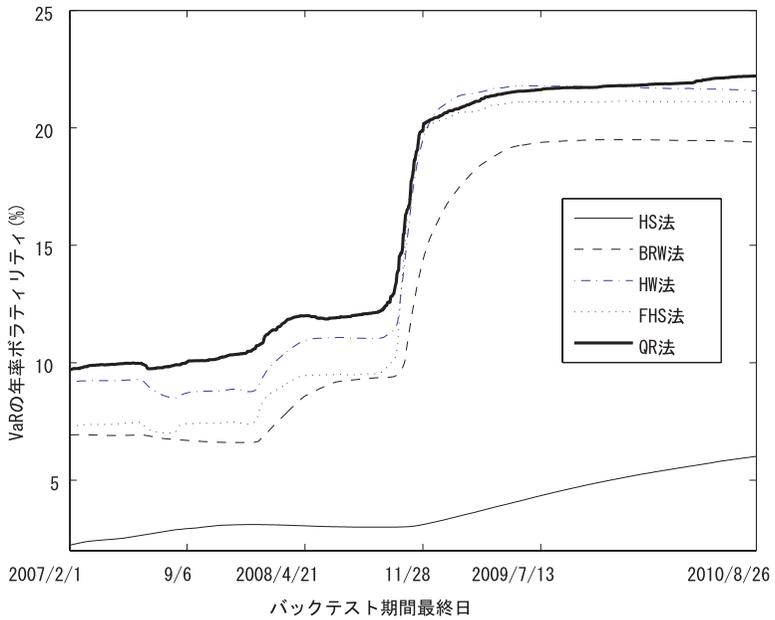


図 3.4:TOPIX95%VaR の年率ボラティリティの推移

### 3.3 VaR の超過事象の相関に関する結果

リターンの変動が激しくなったときに、リターンが VaR を超過する事象が頻繁に起こるといふことは、推定された VaR がリターンの変動をうまく捉えられていないことを意味する。つまり、99%VaR で超過事象が毎日 1% の確率で独立に生じているかということ、VaR が正確に推

定されているかの指標になる。そして、超過事象が独立に生じているほうが実務上望ましい。そのため本論文では、各手法によって推定された VaR の超過事象の自己相関をチェックする。具体的方法としては、安藤（2004）が行ったように、以下の確率変数  $X_t$  を導入する。

$$X_t = \begin{cases} 1 & (\text{時点}t\text{においてリターンがVaRを超過した}) \\ 0 & (\text{時点}t\text{においてリターンがVaRを超過していない}) \end{cases}$$

そして、 $\{X_t\}$  の 1 ～ 15 次の標本自己相関が全て 0 であるという帰無仮説<sup>5</sup>に対し、リュング＝ボックス統計量による検定を行う<sup>6</sup>。

図 3.5 は、99%VaR の各バックテスト期間に関する上記検定結果の P 値を表している。また、図 3.6 は、95%VaR の各バックテスト期間に関する上記検定結果の P 値を表している。そして P 値が 1% または 5% を下回ると、帰無仮説が棄却されることになる。図 3.5 によると、ヒストリカル法では、全期間を通じて 1% で帰無仮説が棄却されている。次に、BRW 法では、全期間にわたって比較的低い P 値を示しており、多くの期間で 1% で帰無仮説が棄却されている。HW 法では、2009 年前半以降、P 値が低くなっており、2009 年後半以降は 1% で帰無仮説が棄却されている。線形 QR 法では 2007 年中頃から 2008 年中頃まで P 値が低くなっているが、1% で帰無仮説が棄却されている期間は短い。FHS 法では、ほぼ全期間を通じて P 値が高くなっている。

図 3.6 によると、ヒストリカル法と BRW 法では、全期間を通じて 1% で帰無仮説が棄却されている。次に、線形 QR 法では、1% で帰無仮説が棄却されている期間は短いものの、全期間にわたって比較的低い P 値を示している。HW 法では、2008 年後半以降、P 値が低くなっているが、1% で帰無仮説が棄却されている期間は短い。FHS 法では、ほぼ全期間を通じて P 値が高くなっている。

相関に関するこれらの結果より、超過事象の独立性という観点からは、FHS 法が VaR 推定手法として最も望ましく、ヒストリカル法、BRW 法は VaR 推定手法として望ましくないといえる。また、99%VaR に関しては、線形 QR 法も VaR 推定手法として望ましいといえる。

VaR の超過事象の相関に関しては、99%VaR の線形 QR 法でリーマンショック以降 P 値が上昇安定したのを除いて、サブプライム問題に特に大きな影響を受けていない。

### 3.4 VaR の相対的水準に関する結果

リスク管理において、VaR の大きさをポジションの保有枠に用いることがあり、この場合 VaR は小さいほうが自己資本額が小さくてすむ。そのため、推定される VaR はできるだけ小さいほうが資本を効率的に運用できることになる。よって、各手法を用いて推定される VaR の相対的水準を比較する。具体的には、安藤（2004）と同様に、875 回のバックテスト期間ごと、各手法ごとに、バックテスト期間に含まれる VaR の平均値を計算する。そして、875 回のバックテスト期間ごとに、全手法の VaR の平均値（各手法の VaR の平均値を全手法で平均したもの）を計算する。最後に、875 回のバックテスト期間ごとに、各手法の VaR の平均値と全手法の VaR の平均値との乖離率を計算することで、各手法で推定される VaR の相対的な水準を表す。

<sup>5</sup> この帰無仮説は、Hull and White（1998）ならびに安藤（2004）と同様である。

<sup>6</sup> 超過事象が独立ならば、全ての自己相関は 0 になる。

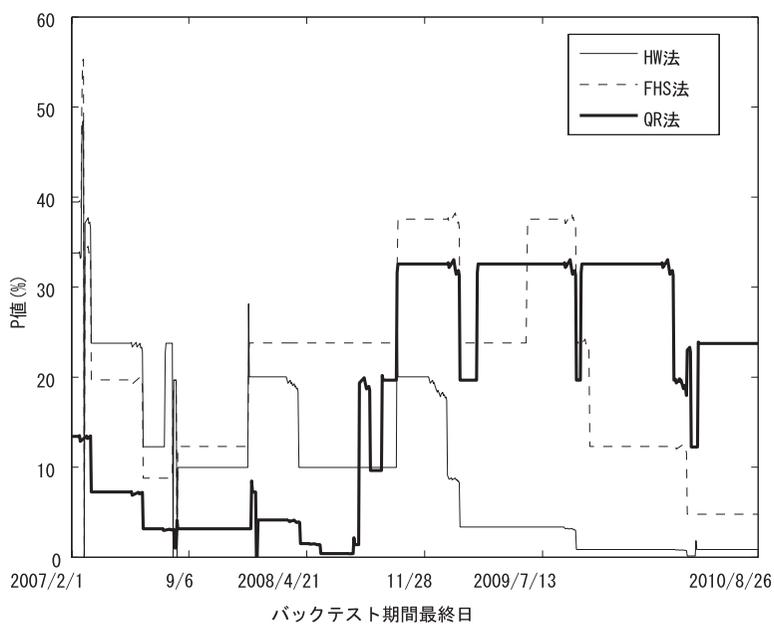
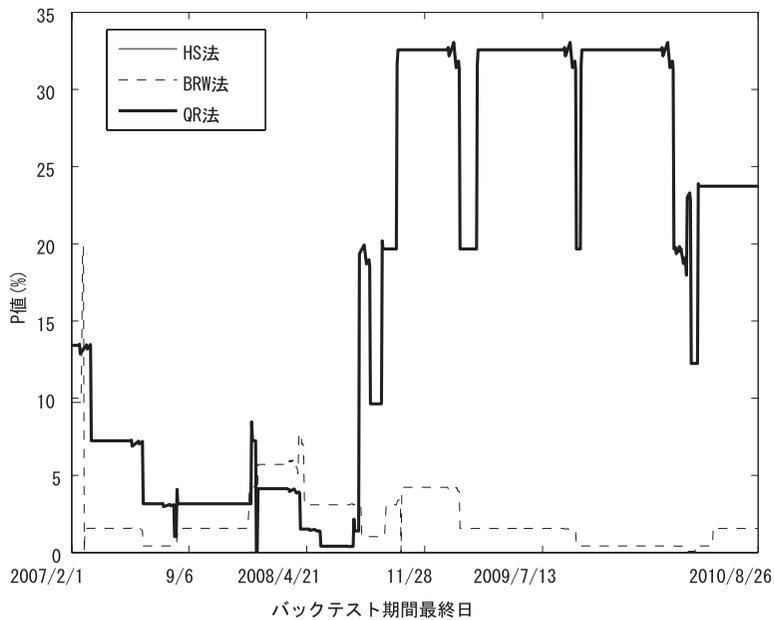


図 3.5: TOPIX99%VaR の超過事象の相関検定結果の推移

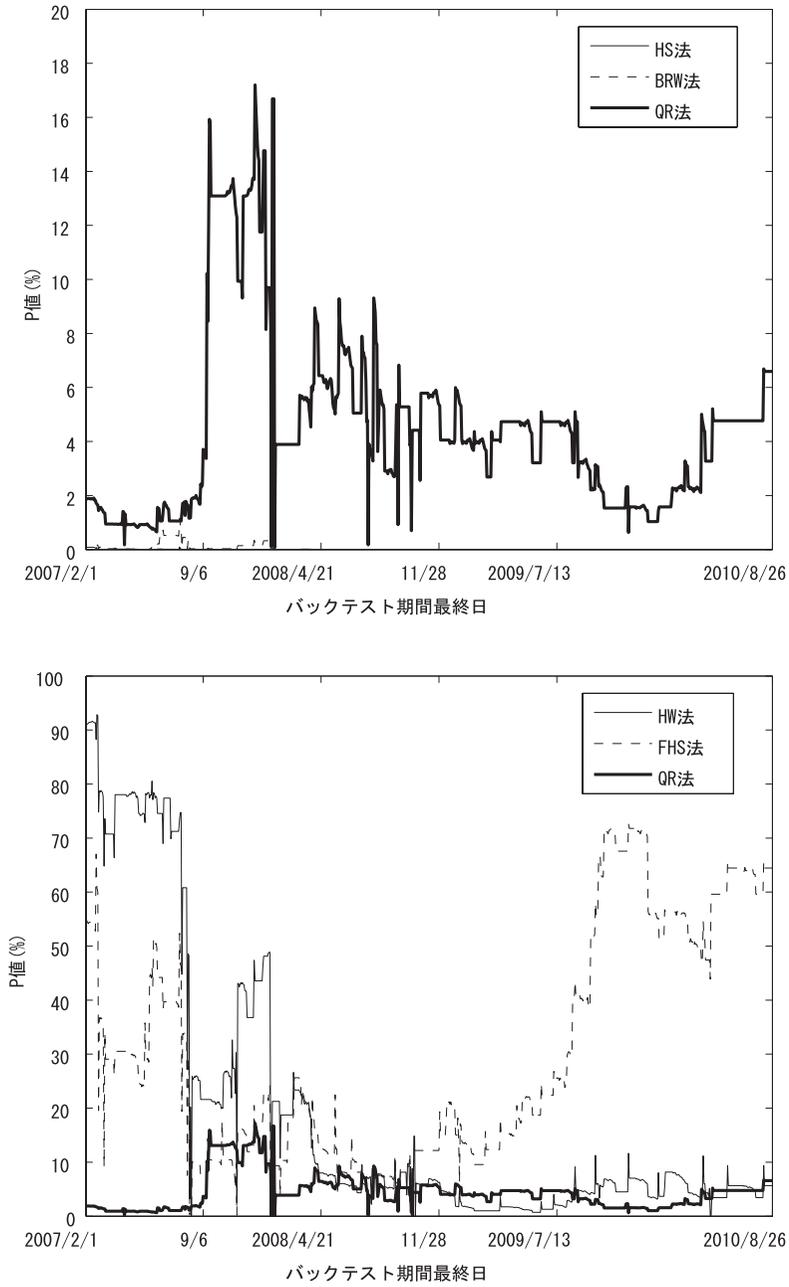


図 3.6: TOPIX95%VaR の超過事象の相関検定結果の推移

図 3.7 は、各手法によって推定される 99%VaR の全手法平均値からの乖離率を表している。図 3.8 は、各手法によって推定される 95%VaR の全手法平均値からの乖離率を表している。図 3.7 によると、2008 年前半までは、ヒストリカル法の乖離率が 5% ~ 10% で最も高い。2008 年前半までの BRW 法、HW 法、FHS 法の乖離率は -2% ~ 4% の短い幅に収まっており、この 3 手法の中では FHS 法の乖離率が低い。線形 QR 法の乖離率は、2008 年前半までは約 -10% と全手法の中で最も低い。2008 年後半から 2009 年後半にかけては、ヒストリカル法の乖離率が一時的に大きく下がり、全手法の中で 2 番目に乖離率が低くなっているが、その後は乖離率が再び高くなっている。一方、BRW 法、HW 法の乖離率は 2008 年後半以降高くなっている。FHS 法の乖離率は、2008 年後半以降あまり上がらず、-1% ~ 4% の幅に収まっている。線形 QR 法の乖離率は、2008 年後半以降さらに -18% まで下がっている。最も乖離率の低い線形 QR 法で -10% ~ -18% なので、自己資本額の全手法平均と比較して、99%VaR の場合に線形 QR 法では 10% ~ 18% もの自己資本額を節約することができる。

図 3.8 によると、2008 年前半までは、ヒストリカル法の乖離率が 2% ~ 8% で、99%VaR の場合と同じく最も高い。2008 年前半までの BRW 法、HW 法、FHS 法の乖離率は -3% ~ 2% の短い幅に収まっているが、この 3 手法の中では BRW 法の乖離率が低い。線形 QR 法の乖離率は、2008 年前半までは約 -5% で、99%VaR の場合と同じく全手法の中で最も低い。2008 年後半以降は、ヒストリカル法の乖離率が大きく下がり、全手法の中で 2 番目に乖離率が低くなっている。一方、BRW 法、HW 法、FHS 法の乖離率は 2008 年後半以降高くなっている。線形 QR 法の乖離率は、2008 年後半以降さらに -12% まで下がっている。よって、自己資本額の全手法平均と比較して、95%VaR の場合に線形 QR 法では 5% ~ 12% もの自己資本額を節約することができる。99%VaR、95%VaR とともに、リーマンショック以降に BRW 法、HW 法、FHS 法では VaR の相対的水準が上昇し、ヒストリカル法、線形 QR 法では VaR の相対的水準が下落している。この現象は、リーマンショック後の市場リスクの高まりに対応して、BRW 法、HW 法、FHS 法では VaR の水準を大きく上昇させているのに対して、ヒストリカル法は対応できず VaR の水準が低いままであることが原因である。そして、線形 QR 法が 3.1 節で確認した通りリーマンショック後の市場リスクの高まりに対応できていることから、線形 QR 法がリーマンショック後の市場リスクの高まりに適度に対応している一方で、BRW 法、HW 法、FHS 法の対応が過剰であることが原因として考えられる。

各手法で推定される VaR の相対的水準に関する以上の結果より、資本の効率的運用という観点からは、線形 QR 法が飛びぬけて望ましい VaR 推定手法であるといえる。また、99%VaR に関しては、多くの期間で 2 番目に乖離率の低い FHS 法が、線形 QR 法に次いで望ましい VaR 推定手法であるといえる。

#### 4 結論と今後の課題

実際に VaR 推定手法をリスク管理実務で利用する場合に、①「VaR が損失を適切に捉えていること」が最も重要であり、次にその条件が満たされたうえで、②「VaR の変動が過度に大きくないこと」が実務上要請される。さらにその上で、③「リターンが VaR を超過する事象に相関がないこと」ならびに、④「他の手法で推定される VaR と比較して VaR の相対的水準が低いこと」が満たされれば、実務上さらに好ましい。本章では、安藤（2004）で示された、これ

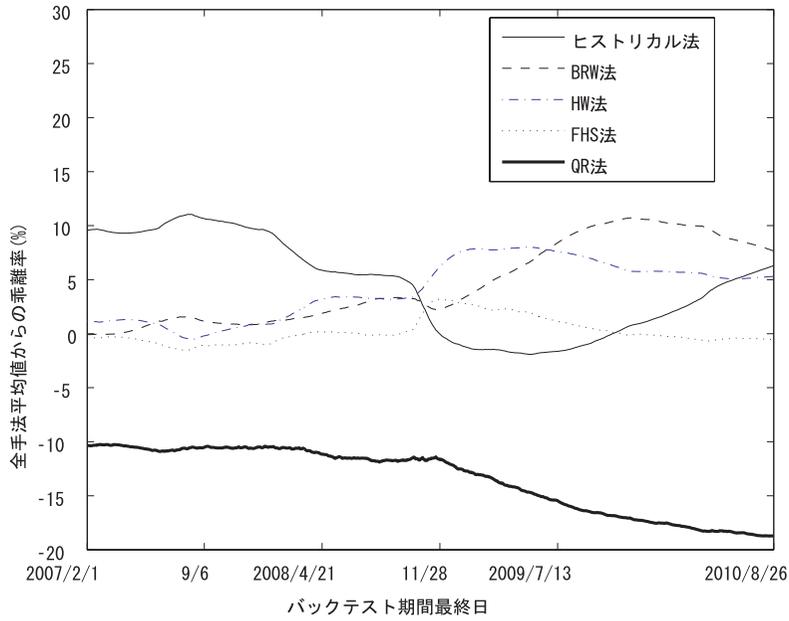


図 3.7: TOPIX99%VaR と TOPIX99%VaR の全手法平均値との乖離率

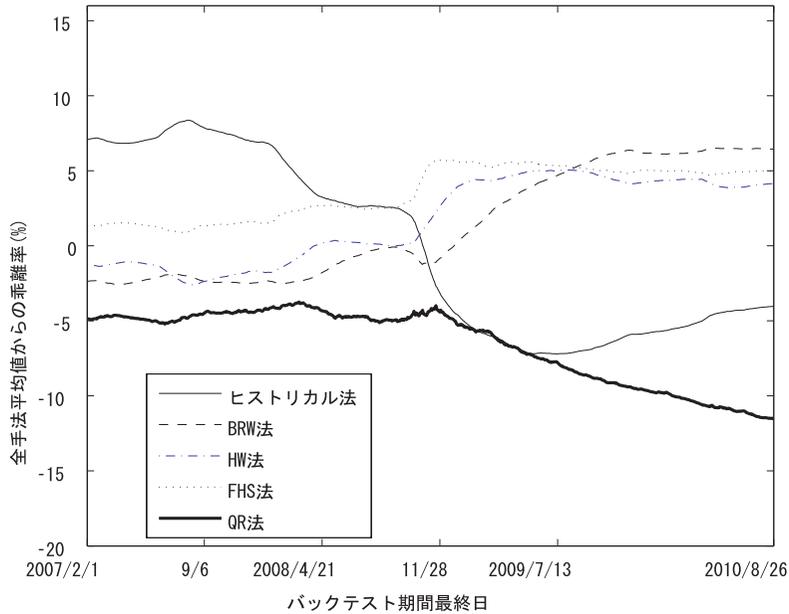


図 3.8: TOPIX95%VaR と TOPIX95%VaR の全手法平均値との乖離率

ら①～④の基準について、各 VaR 推定手法を比較した。

今回の推定結果において、各手法によって推定された 99%VaR が、①～④の基準をいかに満たしているかを次にまとめた。ヒストリカル法については、②の基準で最も低いボラティリティを示したが、①、③の基準については最も悪い結果を示し、基準④については良くも悪くもなかった。BRW 法については、基準③ではヒストリカル法に次いで悪い結果を示したが、その他の基準では良くも悪くもなかった。HW 法は、基準①において FHS 法に次いで良い結果を示したが、基準②では最も悪い結果を示し、基準③、④については良くも悪くもなかった。FHS 法は、基準②で HW 法に次いで悪い結果を示したが、基準①、③において最も良い結果を示し、基準④でも線形 QR 法に次いで良い結果を示した。線形 QR 法については、基準①については良くも悪くもなかったが、基準②、基準③で 2 番目に良い結果を示し、基準④では飛びぬけて良い結果を示した。

さらに、今回の推定結果において、各手法によって推定された 95%VaR が、①～④の基準をいかに満たしているかを次にまとめた。ヒストリカル法については、99%VaR の場合と同様に、②の基準で最も低いボラティリティを示したが、①、③の基準については最も悪い結果を示し、基準④については良くも悪くもなかった。BRW 法については、基準①、③ではヒストリカル法に次いで悪い結果を示したが、その他の基準では良くも悪くもなかった。HW 法は、基準①において最も良い結果を示した一方で、その他の基準では良くも悪くもなかった。FHS 法は、基準①ではヒストリカル法に次いで悪い結果を示したが、基準③において最も良い結果を示し、基準②、④については良くも悪くもなかった。線形 QR 法については、基準②、③については良くも悪くもなかったが、基準①で 2 番目に良い結果を示し、基準④では飛びぬけて良い結果を示した。

そして、サブプライム問題、特にリーマンショック後の市場リスクの高まりが各手法で推定される VaR に与えた影響をまとめる。リーマンショック後の市場リスクの高まりに対して、ヒストリカル法では十分な対応ができず推定精度を大きく落としたが、その反面、VaR の年率ボラティリティは低く抑えられ、相対的水準は下がった。BRW 法、HW 法、FHS 法は、リーマンショック後の市場リスクの高まりに対してしっかりと対応することで、推定精度を落とさなかったが、VaR の年率ボラティリティと相対的水準は上昇した。線形 QR 法は、BRW 法、HW 法、FHS 法と同じく、推定精度を落とさない代わりに VaR の年率ボラティリティが上昇したが、市場リスクの変動に柔軟に対応したため、VaR の相対的水準は下がった。

最後に、以上の結果を踏まえて、各 VaR 推定手法の実務での利用可能性について考察する。今回の推定結果からは、最も重要な基準①において飛びぬけて悪い結果を示したヒストリカル法は、実務での利用にあまり適さないといえる。また、95%VaR の推定に関しては、基準②の結果が良かった HW 法も、実務での利用にあまり適さないといえる。よって、99%VaR に関しては、基準②で HW 法に次いで悪い結果を示したが、基準①、③において最も良い結果を示し、基準④でも線形 QR 法に次いで良い結果を示した FHS 法と、基準①については良くも悪くもなかったが、基準②、基準③で 2 番目に良い結果を示し、基準④では飛びぬけて良い結果を示した線形 QR 法の実務での利用可能性が高いといえる。95%VaR に関しては、基準①において最も良い結果を示した一方で、その他の基準では良くも悪くもなかった HW 法と、基準②、③については良くも悪くもなかったが、基準①で 2 番目に

良い結果を示し、基準④では飛びぬけて良い結果を示した線形 QR 法の実務での利用可能性が高いといえる。

今後の課題としては、基準①～④を同時に高い水準で満たす VaR 推定手法を開発することが挙げられる。その方向性としては、基準④の良い結果を維持しつつ、基準①、②でより良い結果が出せるように、線型 QR 法の説明変数をうまく設定していくことが考えられる。

## 参考文献

安藤美孝 [2004], 「ヒストリカル法によるバリュー・アット・リスクの計測：市場価格変動の非正常性への実務的対応」『金融研究』23 (別冊 2)。

木島正明編著 [1998], 『金融リスクの計量化【上】バリュー・アット・リスク』金融財政事情研究会。

山下智志 [2000], 『市場リスクの計量化と VaR』朝倉書店。

山分俊幸 [2007], 「Quantile Regression とヒストリカル法を用いた Value-at-Risk 推定の精度比較」『名古屋商科大学総合経営・経営情報論集』第 51 巻 2 号。

Barone-Adesi, G., K. Giannopoulos, and L. Vosper, "VaR without Correlations for Non-linear Portfolios", *Journal of Futures Markets*, 19, 1999, pp. 583-602.

Boudoukh, J., M. Richardson, and R. Whitelaw, "The Best of Both Worlds", *RISK*, 11(5), 1998, pp. 64-67.

Ferguson, T. S. [1967], *Mathematical Statistics: A Decision Theoretic Approach*, Academic Press.

Hull, J. and A. White, "Incorporating Volatility Updating into the Historical Simulation Method for Value at Risk", *Journal of Risk*, 1, 1998, pp. 5-19.

Koenker, R. [2005], *Quantile Regression*, Cambridge University Press.

Koenker, R. and G. Bassett, "Regression quantiles", *Econometrica*, 46, 1978, pp. 33-50.

White, H. [1994], *Estimation, Inference and Specification Analysis*, Cambridge University Press.