チーム生産と報酬分配に関する覚書

岩田　正隆　（経済学部経済学科専任講師）

概要

チーム生産状況下の報酬分配について、各労働者の限界生産分布に比して平坦（平等）な分配が行われることを、Cobb-Douglas型に生産関数特定化した簡易なモデルの解析を通じて示す。また、本稿の分析のもつ限界を指摘し、一般化の為の方向性を議論する。

1. はじめに

経営者と従業員の境が曖昧であるような生産組織においては、報酬分配が比較的平坦になる傾向がある。例えば組織の長でさえも労働者の一員に過ぎないような場合には、長に偏った報酬分配がなされるとは考えがたい。これは協働する労働者同士の公平感を維持するためであるかもしれない。だが、他方で、生産技術の性格を反映した総利潤最大化のための解として平坦な報酬分配が実現しえる。本稿は Cobb-Douglas 型の生産関数と凸な費用関数をもつチーム生産のモデルを解析し、そのことを証明する。然る後に分析の拡充に関して議論する。

2. モデル

1から N の N 人の労働者が協業し、それぞれ努力量 $x_1 ..., x_N$ を投入して生産するチーム生産の状況を考える。生産関数は労働者達の努力量の関数であり以下のように書かれる。

$$F(x) = \prod_{i=1}^{N} x_i^{\alpha_i}, \ \sum_{i=1}^{N} \alpha_i = 1.$$

努力の投入には費用がかかる。その費用は費用関数に依存する。労働者共通の費用関数は以下の通り。

$$C(x_i) = x_i^{\sigma} \ (\forall i \in \{1, ..., \} N, \sigma > 1).$$

報酬分配のルールは分配比率のベクトル θ で表現される。分配ルールは予算平衡（budget bal-ancing）の条件を満たしている。

$$\theta \equiv (\theta_1, ..., \theta_N) \geq 0, \sum_{i=1}^{N} \theta_i = 1.$$

このとき労働者 i 個人の利潤は $\pi_i = \theta_i F(x) - C(x_i)$、総利潤は $\pi = F(x) - \sum_{i=1}^{N} C(x_i)$ となる。

θ は総利潤を π 最大化するように定まる。各労働者 i は θ を所与として π_i を最大化するべく自分の労働投入量を決定する。

3. 解析

分配ルールは生産量に依存していないので、契約理論の立場からはこの設定は制約的なものといえる。ところが、予算平衡の条件が伴う場合、この制約はさほどに強いものとはならない。じっさい、微分可能な分配ルールによって実現可能な結果は、モデルで設定したような、生産量に依存しない定数の分配ルールによって実現可能である。

補題 1

任意の微分可能で予算平衡な分配ルールによる均衡の結果は、ある微分可能で予算平衡な定数分配ルールによる均衡の結果でもある。

証明：巻末の付記を参照。

不連続であってもほぼ至る所で連続であるようなより広いクラスの配分ルールについて同様の内容を証明することもできるが、ここでは割愛する。

以下ではこのモデルのサブゲーム完全均衡を分析する。まず、意味の乏しい些末な均衡をまとめてしまうことにする。

補題 2

1） θ の値によらず、全労働者が努力量をゼロにする均衡が存在する。

2）他方で、全労働者の努力量が厳密に正であり、総利潤が正になる均衡が存在する。

証明：Cobb-Douglas 型生産関数と費用関数の性質から明らかであるので割愛する。

不安定な均衡であるとはいえ、両者の努力の乗算として生産量が実現する以上、他の労働者全ての努力量がゼロならば残った一人の労働者にとっても努力量ゼロが最適反応である。以下では 2）にあるような正の利潤が生み出される均衡に着目する。努力量に関する一階条件は次のようになる。

$$\alpha_i \theta_i \prod_{k=1}^{N} x_k^{\alpha_k} - \sigma x_i^{\sigma} = 0 \, (i = 1, \dots N,).$$

変形すると努力量の比を得る。

$$\frac{\alpha_i \theta_i}{\alpha_j \theta_j} = \left(\frac{x_i}{x_j}\right)^{\sigma} \Rightarrow \begin{cases} x_i = \left[\frac{\alpha_i \theta_i}{\sigma} \left\{ \frac{\alpha_j \theta_j}{\alpha_i \theta_i} \right\}^{\frac{\alpha_j}{\sigma}} \right]^{\frac{1}{\sigma - 1}}, \\ \sum_{k=1}^{N} \alpha_k = 1, \sum_{k=1}^{N} \theta_k = 1 \end{cases}$$

ここから生産量の値を導く。

$$F(x) = \prod_{k=1}^{N} \frac{\alpha_k \theta_k}{\sigma}^{\frac{\alpha_k}{\sigma - 1}}.$$

次に、θ に関する最大化問題（生産量－費用の最大化問題）を定数を廃して整理すると以下のようになる。

$$\max_{\theta} \prod_{k=1}^{N} \theta_k^{\frac{\alpha_k}{\sigma - 1}} \cdot \left\{ 1 - \frac{\sum_{k=1}^{N} \alpha_k \theta_k}{\sigma} \right\}, \text{ where } \sum_{k=1}^{N} \alpha_k = 1, \ \sum_{k=1}^{N} \theta_k = 1.$$

これを解くことにより本稿の主たる命題が導かれる。

命題 1

1) $\forall i, j,\ \alpha_i = \alpha_j \Leftrightarrow \theta_i = \theta_j,\ \alpha_i > \alpha_j \Rightarrow \dfrac{\alpha_i}{\theta_i} > \dfrac{\alpha_j}{\theta_j}$, and $\alpha_i > \alpha_j \Rightarrow \theta_i > \theta_j$.

2) $\forall i,$

$\sum_{k=1}^{N} \alpha_k \theta_k < \alpha_i \Rightarrow \alpha_i > \theta_i > \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \theta_k,$
$\sum_{k=1}^{N} \alpha_k \theta_k > \alpha_i \Rightarrow \alpha_i < \theta_i < \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \theta_k,$
$\sum_{k=1}^{N} \alpha_k \theta_k = \alpha_i \Rightarrow \alpha_i = \theta_i = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \theta_k.$

証明：巻末の付記を参照。

α_i を労働者 i の生産への影響力とみると、影響力の高い労働者ほど強い動機付け θ_i を必要とする 1)。しかし他方で、報酬の分配率 θ_i の分布は影響力 α_i の分布に比べて必ず平坦になる。目印となる値が $\sum_{k=1}^{N} \alpha_k \theta_k$ であり、 α_i がこの閾値より高い労働者は影響力より低い分配率を提示され、逆に閾値より低い影響力をもつ労働者はその影響力より高い分配率を提示される。

1）の主張は自然であるとして、2）には幾分か説明が必要だろう。Holmström (1982) が指摘した通り、予算平衡の条件ならびに非負制約をみたす分配ルールではチーム総利潤を最大化させることができず、結果は次善となる。このとき生産量は最善解の与えるものよりも乏しくなる。このとき、最善解においてより努力投入量の多い労働者の投入量を、より大きく減らすことによって、生産量の減少幅に対する予算の削減幅を大きくすることができる（生産関数の凹性ならびに費用関数の凸性による）。従って、投入が多くなる労働者、すなわち影響力の高い労働者に大して、相対的には低い動機付けを与えるのが次善の状況における最適解となる。

4. 分析の限界と展望

結果の関数形への依存が強すぎ直感がいまひとつ定かでない。また、関連文献に対する位置づけが不足である。これらの点を補いつつ結果を増やしていく必要がある。

付記（英文にて）

1. Proof of lemma 1

Individual maximization problem is:

$$\max_{x_i} \theta_i(F(x))F(x) = C_i(x_i), \quad (i = 1, \dots N,).$$

Taking derivative with x_i, the first order condition is

$$\theta_i'(F(x))F_i'(x)F(x) + \theta_i F_i'(x) - C_i'(x_i) = 0.$$

Multiplying $\frac{F}{F_i'}$ and taking sum over i,

$$F(x) - \sum_{i=1}^{N} \frac{C_i'(x_i)}{F_i'} F(x) \Rightarrow \sum_{i=1}^{N} \frac{C_i'(x_i)}{F_i'} = 1.$$

Set $\theta_i^* = \frac{C_i'(x_i)}{F_i'}$ Such constant sharing rule θ^* satisfies the budget balancing condition and $\theta_i^* F_i'(x_i) - C_i'(x_i) = 0$, which is necessary first order condition for x to be individually optimal with sharing rule of θ^*. Concavity of $F(\cdot)$ and convexity of $C(\cdot)$ assures the second order condition. [1]

[1] If a reader were interested in the proof for non-di_erentiable or discontinuous sharing rules, see Iwata (2004).

2. Proof of proposition 1

(1) Note that $\sum_{k=1}^{N} \alpha_k \theta_k < 1$, so that $(1- \sum_{k=1}^{N} \frac{\alpha_k \theta_k}{\sigma}) > \frac{\sigma-1}{\sigma}$. = $\alpha_i = \alpha_j \Rightarrow \theta_i = \theta_j$ and $\alpha_i > \alpha_j \Rightarrow \frac{\alpha_i}{\theta_i} > \frac{\alpha_j}{\theta_j}$ are obvious. The condition above is rewritten as follows.

$$\alpha_i \left\{ \frac{1}{\theta_i} \left(1 - \sum_{k=1}^{N} \frac{\alpha_k \theta_k}{\sigma} \right) - \frac{\sigma - 1}{\sigma} \right\} = \alpha_j \left\{ \frac{1}{\theta_j} \left(1 - \sum_{k=1}^{2} \frac{\alpha_k \theta_k}{\sigma} \right) - \frac{\sigma - 1}{\sigma} \right\},$$

where each terms in brackets is strictly positive. Therefore, if $\alpha_i > \alpha_j$, $\theta_i > \theta_j$ is necessary. The same equation tells that if θ_i is equal to θ_j, α_i and α_j must be equal.

(2) Multiplying $\theta_i \theta_j$ on both sides of the equation, we have

$$\theta_j \alpha_i \left(1 - \sum_{k=1}^{N} \frac{\alpha_k \theta_k}{\sigma} \right) - \frac{(\sigma - 1) \alpha_i \theta_i \theta_j}{\sigma} = \theta_i \alpha_j \left(1 - \sum_{k=1}^{N} \frac{\alpha_k \theta_k}{\sigma} \right) - \frac{(\sigma - 1) \alpha_j \theta_j \theta_i}{\sigma}.$$

Taking sum over j,

$$\alpha_i \left(1 - \sum_{k=1}^{N} \frac{\alpha_k \theta_k}{\sigma} \right) - \frac{(\sigma - 1) \alpha_i \theta_i}{\sigma} = \theta_i \left(1 - \sum_{k=1}^{N} \frac{\alpha_k \theta_k}{\sigma} \right) - \theta_i \sum_{k=1}^{N} \frac{(\sigma - 1) \alpha_k \theta_k}{\sigma},$$

$$\Leftrightarrow \alpha_i \left\{ 1 - \sum_{k=1}^{N} \frac{\alpha_k \theta_k}{\sigma} - \frac{(\sigma - 1) \theta_i}{\sigma} \right\} = \theta_i \left\{ 1 - \sum_{k=1}^{N} \frac{\alpha_k \theta_k}{\sigma} - \sum_{k=1}^{N} \frac{(\sigma - 1) \alpha_k \theta_k}{\sigma} \right\}.$$

In the equation just above, on both sides, the terms in parentheses are strictly positive. Then, the following lemma can easily be shown.

参考文献

1. Holmström, B. (1982): “Moral Hazard in Teams”, Bell Journal of Economics 13, 324-340.

2. Iwata, M. (2004): “Team production and constant share”, mimeo.