リーマン多様体上の曲線の空間と Laplace-Beltrami作用素について

廣　島　　　勉

[2]では不完全ではあるが、リーマン多様体上で経路積分を表現することを考察した。本論文では、適当な条件の下でリーマン多様体の曲線の空間が、ヒルベルト空間$L^2([0, 1], \mathbb{R}^n)$とみなせること、および、$L^2([0, 1], \mathbb{R}^n)$上のある作用素が、$M$のLaplace-Beltrami作用素に対応する、$L^2([0, 1], \mathbb{R}^n)$上の「微分作用素」の計算に、重要な役割を果たすことを示したい。

1　接ベクトルが2乗可積分である曲線

(M, g)を、n次元コンパクトリーマン多様体とする。Mは連結で、向き付けられ、境界を持たないとする。$\pi : O(M) \to M$をリーマン計量gから誘導される(M, g)の主$SO(n)$束、ω、θを、それぞれ、リーマン多様体(M, g)のLevi-Civita接続の接続形式と標準1次微分形式とする。

$\gamma: [0, 1] \ni s \mapsto \gamma(s) \in M$が、$M$の$C^1$級の曲線であるとき、$O(M)$の$C^1$級の曲線$\hat{\gamma}: [0, 1] \to O(M)$で、Levi-Civita接続に関する$\gamma$の水平持ち上げ、すなわち、

$$\pi(\hat{\gamma}(s)) = \gamma(s),$$
$$\omega\left(\frac{d\hat{\gamma}}{ds}\right) = 0$$

となる曲線が、起点$p_0 \in \pi^{-1}(x_0)$ $(x_0 = \gamma(0))$の選び方を除いて、一意的に定まる。

$\xi = \theta\left(\frac{d\hat{\gamma}}{ds}\right)$とすると、$\xi$は区間$[0, 1]$で定義された、$\mathbb{R}^n$値$C^0$級関数である。

ここでは、逆に、2乗可積分な$\mathbb{R}^n$値関数ξから、$O(M)$の水平な曲線が定義できることを見よう。

定理1.1. $\xi \in L^2([0, 1], \mathbb{R}^n)$と起点$p \in O(M)$が与えられたとき、

$$\omega\left(\frac{d\hat{\gamma}}{ds}\right) = 0, \qquad \theta\left(\frac{d\hat{\gamma}}{ds}\right) = \xi \tag{1.1}$$

となる曲線$\hat{\gamma}: [0,1] \to O(M)$が一意的に存在する。

証明. 主束の局所自明化を与えるような、$O(M)$の座標近傍(U, ϕ)を$\phi = (x, a) : U \to \mathbb{R}^n \times \mathfrak{o}(n)$とする。

この座標近傍内で$O(M)$の曲線$\hat{\gamma}$の接ベクトルは

$$\frac{d\hat{\gamma}}{ds}=\frac{d(x\circ\hat{\gamma})}{ds}+\frac{d(a\circ\hat{\gamma})}{ds}$$

と表される。第2の成分は$O(M)$の垂直成分であり、微分方程式(1.1)は、

$$\theta\left(\frac{d\hat{\gamma}}{ds}\right)=\sum_{i=1}^{n}\frac{d(x^i\circ\hat{\gamma})}{ds}\theta\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)=\xi,$$
$$\omega\left(\frac{d\hat{\gamma}}{ds}\right)=\sum_{i=1}^{n}\frac{d(x^i\circ\hat{\gamma})}{ds}\omega\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)+\frac{d(a\circ\hat{\gamma})}{ds}=0$$

と書き下せる。$\left(\theta\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)\right)_{i=1,2,\ldots,n}$を行列とみなせば座標近傍内で正則であるので、その逆行列を$P(x,a)$として、微分方程式（1.1）を書き直すと

$$\frac{d(x^i\circ\hat{\gamma})}{ds}=\sum_{j=1}^{n}P_j^i\,(x\circ\hat{\gamma},a\circ\hat{\gamma})\xi^j,$$
$$\frac{d(a\circ\hat{\gamma})}{ds}=-\sum_{i=1,j=1}^{n}\omega\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)P_j^i\,(x\circ\hat{\gamma},a\circ\hat{\gamma})\,\xi^j$$

となる。すなわち、座標近傍内で微分方程式(1.1)を解くことは、$\phi(U)\subset\mathbb{R}^n\times\mathfrak{o}(n)$から線型写像の空間$\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n\oplus\mathfrak{o}(n))$に値を持つ関数$F$を

$$F(u)=F(x,a)=P(x,a)\oplus\left(-\sum_{i=1}^{n}\omega\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)P^i(x,a)\right)$$

とするとき、$f:[0,1]\to\phi(U)\subset\mathbb{R}^n\times\mathfrak{o}(n)$を未知関数として、微分方程式

$$f'=F(f)\xi \qquad (1.2)$$

を解くことに他ならない。

主束$O(M)$には、底空間Mの計量gと$SO(n)$の標準的な計量から、自然に誘導された計量が存在する。$\exp_p$を、その計量に関する$O(M)$の指数写像とする。$O(M)$の座標近傍(U,ϕ)を$\phi=\exp_p$、$\phi(U)=D(r)=\{u\in\mathbb{R}^n\times\mathfrak{o}(n)\,\big|\,|u|^2<r\}$なるように改めてとり、$r>0$を

$$K=\sup\left\{|F(u)|\,\big|\,u\in D(r)\right\}<\infty,$$
$$L=\sup\left\{\frac{|F(u_1)-F(u_2)|}{|u_1-u_2|}\,\middle|\,u_1,u_2\in D(r),\,u_1\neq u_2\right\}<\infty$$

なるように選ぶ。初期値$p=(0,0)\in\phi(U)$に対し、関数列$\{f_i(s)\}_{i=0,1,2,\ldots}$を漸化式

$$f_0(s)=0,$$
$$f_i(s)=\int_0^s F(f_{i-1}(\sigma))\xi\,d\sigma \qquad (i=1,2,\ldots)$$

で定義する。

$\delta=\sup\{s\mid\sqrt{s}K\|\xi\|_{L^2}<r\}$とおくと、

$$\left|\int_0^s F(f_i(\sigma))\xi\,d\sigma\right|\leq\sqrt{s}K\|\xi\|_{L^2}$$

であるから、$0\leq s\leq\delta$である限り、$f_i(s)\in D(r)$となり、C^0級の関数列$\{f_i(s)\}_{i=0,1,2,\ldots}$は定義す

ることができる。また、その導関数については、

$$
\begin{aligned}
&f_0'(s) = 0, \\
&f_i'(s) = F(f_{i-1}(\sigma))\xi \qquad (i = 1, 2, \ldots)
\end{aligned}
\tag{1.3}
$$

より、$0 \leq s \leq \delta$においてL^2関数となる。

関数列$\{f_i(s)\}_{i=0,1,2,\ldots}$の極限が存在することは、標準的な議論で示される。$g_i(s) = f_{i+1}(s) - f_i(s)$ $(i = 0, 1, 2, \ldots)$とおくと、

$$
|g_0(s)| \leq \int_0^s |F(f_0(\sigma))\xi| d\sigma \leq \sqrt{s} K \|\xi\|_{L^2},
$$

$$
|g_i(s)| \leq \int_0^s |F(f_i(\sigma))\xi - F(f_{i-1}(s))\xi| \, d\sigma \leq \sqrt{\int_0^s |g_i(\sigma)|^2 d\sigma} \; L\|\xi\|_{L^2} \qquad (i = 1, 2, \ldots)
$$

から、帰納的に

$$
|g_i(s)| \leq \sqrt{\frac{s^{i+1}}{(i+1)!}} KL^i \|\xi\|_{L^2}^{i+1}
$$

であり、$i > j$のとき、$f_i(s) - f_j(s) = g_{i-1}(s) + g_{i-2}(s) + \cdots + g_j(s)$であるから、

$$
|f_i(s) - f_j(s)| \leq K \sum_{k=j}^{i-1} \sqrt{\frac{s^{k+1}}{(k+1)!}} KL^k \|\xi\|_{L^2}^{k+1}
$$

となる。ここで、

$$
\lim_{k\to\infty} (\sqrt{k!})^{\frac{1}{k}} = \sqrt{\lim_{k\to\infty} (k!)^{\frac{1}{k}}} = \infty
$$

より、級数$\sum_k \frac{z^k}{\sqrt{k!}}$の収束半径は$\infty$であるから、級数$\sum_k \sqrt{\frac{s^{k+1}}{(k+1)!}} KL^k \|\xi\|_{L^2}^{k+1}$は収束する級数であり、$0 \leq s \leq \delta$において関数列$\{f_i(s)\}_{i=0,1,2,\ldots}$は$C^0$位相でコーシー列となる。関数列$\{f_i(s)\}_{i=0,1,2,\ldots}$は$C^0$収束する。

関数列$\{f_i(s)\}_{i=0,1,2,\ldots}$の導関数列$\{f_i'(s)\}_{i=0,1,2,\ldots}$については、

$$
\int_0^\delta |f_i'(\sigma) - f_j'(\sigma)|^2 d\sigma \leq \int_0^\delta |F(f_i(\sigma)) - F(f_j(\sigma))|^2 |\xi|^2 d\sigma \leq L\|\xi\|_{L^2} \max_{0\leq\sigma\leq\delta} |f_i(\sigma) - f_j(\sigma)|
$$

から、$0 \leq s \leq \delta$において、関数列$\{f_i'(s)\}_{i=0,1,2,\ldots}$は$L^2$位相でコーシー列を成す。導関数列$\{f_i'(s)\}_{i=0,1,2,\ldots}$は$L^2$位相で収束する。

したがって、関数列$\{f_i(s)\}_{i=0,1,2,\ldots}$は$L^{2,1}$位相で収束し、その極限$f$は微分方程式(1.2)の$0 \leq s \leq \delta$における解となる。

また、関数gが$0 \leq s \leq \delta$において、微分方程式

$$
g' = F(g)\,\xi
$$

を満たし、かつ$f(0)=g(0)$であるとすると、

$$
|f(s) - g(s)|^2 \leq L^2 \|\xi\|_{L^2}^2 \int_0^s |f(\sigma) - g(\sigma)|^2 d\sigma \tag{1.4}
$$

の不等式が成立する。$a(s)$を

$$a(s) = \exp(-sL^2 \|\xi\|_{L^2}^2)\int_0^s |f(\sigma)-g(\sigma)|^2 d\sigma$$

と定義すると、不等式(1.4)から、$a'(s) \leq 0$をみたす。ところが、$a(0)=0$であるので、$0 \leq s \leq \delta$において、恒等的に$a(s) \equiv 0$、したがって、$|f(s)-g(s)|^2 \equiv 0$であることが示される。

このように、微分方程式(1.1)は、初期条件$\hat{\gamma}(0)=u$の下で、ある$\delta > 0$に対し、$0 \leq s \leq \delta$の範囲で一意的な解をもつことがわかった。

微分方程式(1.1)の解が$0 \leq s \leq 1$まで延長可能なことを見るため、

$$\delta^* = \sup\ \{\delta \mid 0 \leq s \leq \delta \text{ において微分方程式(1.1)の解が存在する}\}$$

とおこう。

もし$\delta^* < 1$であったとする。$d_{O(M)}$を主束$O(M)$の自然な計量に関する距離とすると、$s_1 < s_2 < \delta^*$に対し、

$$d_{O(M)}(\hat{\gamma}(s_1), \hat{\gamma}(s_2)) \leq \int_{s_1}^{s_2} |\xi| d\sigma \leq \sqrt{|s_2 - s_1|}\, \|\xi\|_{L^2}$$

であるため、極限$u^* = \lim_{s \uparrow \delta^*} \hat{\gamma}(s) \in O(M)$が存在する。座標近傍を$\pi(u^*) \in M$の周りで取り直し、上記議論を繰り返せば、ある$\varepsilon > 0$に対し、$\delta^* - \varepsilon \leq s \leq \delta^* + \varepsilon$において、微分方程式(1.1)の解$\hat{\gamma}_1$が存在し、$\delta^* - \varepsilon \leq s \leq \delta^*$においては、一意性から$\hat{\gamma}$と$\hat{\gamma}_1$は一致する。$\hat{\gamma}$と$\hat{\gamma}_1$を接続すれば、$0 \leq s \leq \delta^* + \varepsilon$における、微分方程式(1.1)の解となる。これは$\delta^*$の定義に矛盾するため$\delta^* = 1$でなくてはならない。 □

この定理より、起点$x_0 \in M$を固定するとき、接ベクトルが2乗可積分である曲線の空間が次の様に定義できる。

定義1.

$$\Omega^2(M, x_0) = \left\{ \pi \circ \hat{\gamma} \;\middle|\; \hat{\gamma} : [0,1] \to O(M),\ \pi(\hat{\gamma}(0)) = x_0,\ \omega\left(\frac{d\hat{\gamma}}{ds}\right) = 0,\ \theta\left(\frac{d\hat{\gamma}}{ds}\right) \in L^2([0,1], \mathbb{R}^n) \right\}$$

2　曲線の変分と作用素Z

定理1.1により空間$\Omega^2(M, x_0)$は、$L^2([0,1], \mathbb{R}^n) \ni \xi \mapsto \pi \circ \hat{\gamma}$を謂わば座標として持つと考えられる。

Yを$\hat{\gamma}$に沿ったPのベクトル場とする。Levi-Civita接続においては、歪率は0であるので、

$$\begin{aligned} 2d\theta\left(\frac{d\hat{\gamma}}{ds}, Y\right) &= \omega(Y)\,\theta\left(\frac{d\hat{\gamma}}{ds}\right) = \omega(Y)\,\xi, \\ 2d\omega\left(\frac{d\hat{\gamma}}{ds}, Y\right) &= R\left(\theta\left(\frac{d\hat{\gamma}}{ds}\right),\ \theta(Y)\right) = R(\xi, \theta(Y)) \end{aligned} \tag{2.1}$$

である。ここでは、(M,g)リーマン曲率Rを、枠束$O(M)$上の$\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$値関数とみなしている。

$\xi \in L^2([0,1], \mathbb{R}^n)$が、定理1.1により$O(M)$の曲線$\hat{\gamma}$に対応しているとする。それらの変分の間には次の関係が成立する。

命題2.1. ξの変分をηとするとき、$O(M)$の曲線$\hat{\gamma}$のηに対応する変分Yは、初期条件$\theta(Y)=0,\ \omega(Y)=0$の下で、微分方程式

$$\begin{aligned}\theta(Y)' &= \eta+\omega(Y)\xi,\\ \omega(Y)' &= R(\xi,\theta(Y))\end{aligned}\tag{2.2}$$

の解である。

証明. 曲線の変分Yに対しては、$\left[\dfrac{d}{ds},Y\right]=0$であることに注意して、

$$2d\theta\left(\frac{d\hat{\gamma}}{ds},Y\right)=\frac{d}{ds}\theta\,(Y)-Y\left(\theta\left(\frac{d\hat{\gamma}}{ds}\right)\right)=\theta\,(Y)'-\eta,$$

また、

$$2d\omega\left(\frac{d\hat{\gamma}}{ds},Y\right)=\frac{d}{ds}\omega\,(Y)-Y\left(\omega\left(\frac{d\hat{\gamma}}{ds}\right)\right)=\omega(Y)'$$

なので、(2.1)から、命題を得る。 □

積分$\int_0^s d\sigma$を単に$\int$と書くこととし、$L^2([0,1],\mathbb{R}^n)$からそれ自身への作用素Zを、

$$Zf=\left(\int R\left(\xi,\int f\right)\right)\xi$$

で定義する。$f\mapsto\int f$は$L^2([0,1],\mathbb{R}^n)$からそれ自身へのコンパクト作用素であるので、Zもコンパクト作用素である。

$$\omega(Y)=\int R(\xi,\ \theta(Y))=\int R\left(\xi,\int\theta(Y)'\right)$$

であるので、微分方程式(2.2)は、初期値条件も含め、作用素Zを用いて

$$\eta=(1-Z)\,\theta(Y)'\tag{2.3}$$

と表される。

多様体Mはコンパクトであるから、$\max_{O(M)}|R(a,b)|\leq K\,|a||b|$となる$K>0$が存在する。したがって、$0\leq s\leq 1$において、

$$\begin{aligned}\left|R\left(\xi,\int f\right)\right|(s)&\leq\sqrt{s}K\,|\xi|\,\|f\|_{L^2},\\ \left|\int R\left(\xi,\int f\right)\right|(s)&\leq\sqrt{\frac{s^2}{2}}\,K\,\|\xi\|_{L^2}\,\|f\|_{L^2},\\ |Zf|(s)&\leq\sqrt{\frac{s^2}{2}}\,|\xi|\cdot K\,\|\xi\|_{L^2}\,\|f\|_{L^2}\end{aligned}\tag{2.4}$$

の各評価が成立する。最後の不等式(2.4)から、

$$\|Zf\|_{L^2}\leq\frac{1}{\sqrt{2}}K\,\|\xi\|_{L^2}^2\,\|f\|_{L^2}$$

を得る。したがって、

命題2.2. Zの作用素ノルムは

$$\| Z \| \leq \frac{1}{\sqrt{2}} K \| \xi \|_{L^2}^2$$

を満たす。

次に、Z のべき乗の作用素ノルムについての評価を導こう。

補題1. $0 \leq s \leq 1$ において、

$$| Z^k f |(s) \leq \frac{s^k}{\sqrt{(2k)!}} |\xi| \cdot K^k \| \xi \|_{L^2}^{2k-1} \| f \|_{L^2} \tag{2.5}$$

が成立する。

証明. $k=1$ においては(2.4)そのものである。いま、k において命題が成立するとすると、

$$\left| \int Z^k f \right|(s) \leq \sqrt{\frac{s^{2k+1}}{(2k+1)!}} K^k \| \xi \|_{L^2}^{2k} \| f \|_{L^2},$$

$$\left| R\left(\xi, \int Z^k f \right) \right|(s) \leq \sqrt{\frac{s^{2k+1}}{(2k+1)!}} |\xi| \cdot K^{k+1} \| \xi \|_{L^2}^{2k} \| f \|_{L^2},$$

$$\left| \int R\left(\xi, \int f \right) \right|(s) \leq \sqrt{\frac{s^{2k+2}}{(2k+2)!}} K^{k+1} \| \xi \|_{L^2}^{2k+1} \| f \|_{L^2},$$

$$| Z^k f |(s) \leq \sqrt{\frac{s^{2k+2}}{(2k+2)!}} |\xi| \cdot K^{k+1} \| \xi \|_{L^2}^{2k+1} \| f \|_{L^2}$$

より、$k+1$ でも命題が成立する。 □

(2.5)から、次の命題を得る。

命題2.3. Z^k の作用素ノルムは

$$\| Z^k \| \leq \frac{1}{\sqrt{(2k)!}} K^k \| \xi \|_{L^2}^{2k}$$

を満たす。

命題2.4. 作用素 Z のべき級数和、

$$1 + Z + Z^2 + \cdots$$

は、作用素ノルムで収束する。したがって、$(1-Z)^{-1}$ は $L^2([0,1], \mathbb{R}^n)$ 上の有界作用素である。 □

証明. 級数 $\sum_k \frac{z^k}{\sqrt{(2k)!}}$ の収束半径は、

$$\lim_{k \to \infty} \left(\sqrt{(2k)^2} \right)^{\frac{1}{k}} = \lim_{k \to \infty} \left(\sqrt{(2k)^2} \right)^{\frac{1}{2k}} = \infty$$

より ∞ となるので、級数 $\sum_k \frac{1}{\sqrt{(2k)!}} K^k \| \xi \|_{L^2}^{2k}$ は収束する。したがって、$\sum_k \| Z^k \|$ も収束する。

したがって、方程式(2.3)から、次の命題を得る。

命題2.5. ξ の変分を η とするとき、$O(M)$ の曲線 $\hat{\gamma}$ の η に対応する変分 Y は、

$$\theta(Y)' = (1 - \mathrm{Z})^{-1} \eta$$

で、与えられる。

3　Laplace-Beltrami作用素Δと微分作用素D_λ

fをM上の滑らかな関数とする。写像$L^2([0,1], \mathbb{R}^n) \to \Omega^2(M, x_0) \ni \gamma \mapsto \gamma(1) \in M$によって、$f$を$L^2([0,1], \mathbb{R}^n)$上に引き戻し、空間$L^2([0,1], \mathbb{R}^n)$上で微分することを考えたい。

$L^2([0,1], \mathbb{R}^n)$の正規直交基$\{\varphi_\nu\}$を固定する。$L^2([0,1], \mathbb{R}^n)$のφ_νの方向への変分に対応する、$O(M)$の曲線$\hat{\gamma}$の変分∂_νは§2の結果から、

$$\theta(\partial_\nu)' = (1-Z)^{-1}\varphi_\nu$$

で特徴づけられる。

fの微分dfを$O(M)$に引き戻すと、$\mathbb{R}^n$値関数とみなすことができる。これを∇fと表そう。終点$\gamma(1) \in M$における微分係数$\partial_\nu f(\gamma(1))$は、

$$\partial_\nu f = \nabla_i f\, \theta^i(\partial_\nu)$$

と表される。

$\langle , \rangle$を$L^2([0,1], \mathbb{R}^n)$の内積とし、Z^*をZの共役作用素とする。Z^*もコンパクト作用素である。ここで、

$$D_\mu = \sum_\nu \langle \varphi_\mu, (1-Z^*)\varphi_\nu \rangle\, \partial_\nu$$

と定義する。

$e_i : [0,1] \mapsto \mathbb{R}^n$ $(i=1, 2, ..., n)$を、

$$\begin{aligned} e_1(s) &= (1, 0, 0 \ldots, 0, 0), \\ e_2(s) &= (0, 1, 0 \ldots, 0, 0), \\ &\ldots, \\ e_n(s) &= (0, 0, 0 \ldots, 0, 1) \end{aligned}$$

で定義される定数関数とすると、

$$\theta^j(\partial_\nu) = \langle \theta(\partial_\nu)', e_j \rangle = \langle (1-Z)^{-1}\varphi_\nu, e_j \rangle,$$
$$\sum_\nu \langle \varphi_\mu, (1-Z^*)\varphi_\nu \rangle\, \theta^i(\partial_\nu) = \langle \varphi_\mu, e_j \rangle$$

であるので、

$$D_\mu f = \sum_j \nabla_j f \langle \varphi_\mu, e_j \rangle$$

となる。

終点$\gamma(1) \in M$において、さらに∂_νを適用すると、$\partial_\nu \nabla_j f = \nabla^2_{ij} f\, \theta^i(\partial_\nu) + \nabla_i f\, \omega^i_j(\partial_\nu)$から、

$$\partial_\nu D_\mu f = \sum_{i,j} \left(\nabla^2_{ij} f\, \theta^i(\partial_\nu) + \nabla_i f\, \omega^i_j(\partial_\nu)\right) \langle \varphi_\mu, e_j \rangle$$

となる。$\nabla^2 f$はfのヘシアンを$O(M)$上に引き戻し、$\mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^n$値関数とみなしたものである。

したがって、

$$D_\lambda D_\mu f = \sum_{i,j} \left(\nabla^2_{ij} f \langle \varphi_\lambda, e_i \rangle + \nabla_i f \sum_\nu \omega^i_j (\partial_\nu) \langle \varphi_\lambda, (1-Z^*)\varphi_\nu \rangle \right) \langle \varphi_\mu, e_j \rangle \tag{3.1}$$

である。(3.1)内の和 $\sum_\nu \omega^i_j (\partial_\nu) \langle \varphi_\lambda, (1-Z^*)\varphi_\nu \rangle$ については、

$$\omega^i_j (\partial_\nu) = \langle \omega(\partial_\nu)' e_j, e_i \rangle = \langle R(\xi, \theta(\partial_\nu)) e_j, e_i \rangle = \left\langle R(e_j, e_i)\xi, \int (1-Z)^{-1}\varphi_\nu \right\rangle$$

より、

$$\sum_\nu \omega^i_j (\partial_\nu) \langle \varphi_\lambda, (1-Z^*)\varphi_\nu \rangle = \sum_\nu \left\langle R(e_j, e_i)\xi, \int (1-Z)^{-1}\varphi_\nu \right\rangle \langle \varphi_\lambda, (1-Z^*)\varphi_\nu \rangle$$
$$= \left\langle R(e_j, e_i)\xi, \int \varphi_\lambda \right\rangle$$

と、リーマン曲率が現れる。これを計算に入れれば、

$$D_\lambda D_\mu f = \sum_{i,j} \left(\nabla^2_{ij} f \langle \varphi_\lambda, e_i \rangle + \nabla_i f \left\langle R(e_j, e_i)\,\xi, \int \varphi_\lambda \right\rangle \right) \langle \varphi_\mu, e_j \rangle$$

を得る。

したがって、さらに和をとることで、

$$\sum_\lambda D^2_\lambda f = \sum_{i,j} \left(\nabla^2_{\mathrm{ij}} f \langle e_i, e_j \rangle + \nabla_i f \left\langle R(e_j, e_i)\xi, \int e_{\mathrm{j}} \right\rangle \right)$$
$$= -\Delta f + \sum_{i,j} \nabla_i f \int_0^1 (R(e_j, e_i)\xi, e_j)\, \sigma d\sigma$$

である。

このように、$L^2([0,1], \mathbb{R}^n)$での「2階微分作用素」

$$\sum_\lambda D^2_\lambda f$$

がM上の Laplace-Beltrami 作用素に関連付けられる事がわかる。また、リッチ曲率 $\sum_i (R(e_j, e_i)\,\xi, e_i)$が $\sum_\lambda D^2_\lambda$の計算中に現れる事も興味深い。

参考文献

藤原　大輔、ファインマン経路積分の数学的方法、シュプリンガー・フェアラーク東京、(1999)

T. Hiroshima, *A Thought about Feynman Path Integral on Riemannian Manifold* NUCB Journal of Economics and Information Science Vol.55 No.2, (2011) 219−225.