

線型 Quantile Regression を用いた 期待ショートフォールの推定

山分俊幸

1 はじめに

2007年2月初めにサブプライム問題が顕在化した後、打撃を受けた投資銀行やヘッジファンドが株を手放すことで、世界中で株価の暴落とその反動の急騰が繰り返された。日本においては、急激な円高の影響も加わり、特にリーマンショック後に株価が乱高下を繰り返した。株価が乱高下する状態とは、株価リターンのボラティリティが高まっている状態である。図1.1は、2004年8月26日から2010年8月26日までのTOPIXリターンの20日ヒストリカルボラティリティの推移を表している。図1.1によると、2007年2月以前は1%未満を示すことが多かったTOPIXリターンの20日ヒストリカルボラティリティが、2007年2月以降は多くの場合で1%以上を示していることがわかる。また、2008年9月のリーマンショック直後に、TOPIXリターンの20日ヒストリカルボラティリティが急上昇していることがわかる。よって、サブプライム問題が日本の株価変動に与えた影響は、リーマンショック直後に如実に現れているといえる。

上記したような、サブプライム問題顕在化後の市場の混乱は、改めてリスクの恐ろしさを我々に知らしめ、リスク管理の重要性を再認識させた。例えば、室町（2008）では、サブプライム問題に端を発した金融危機で分かったことは、金融機関のリスク管理もまだ発展途上で

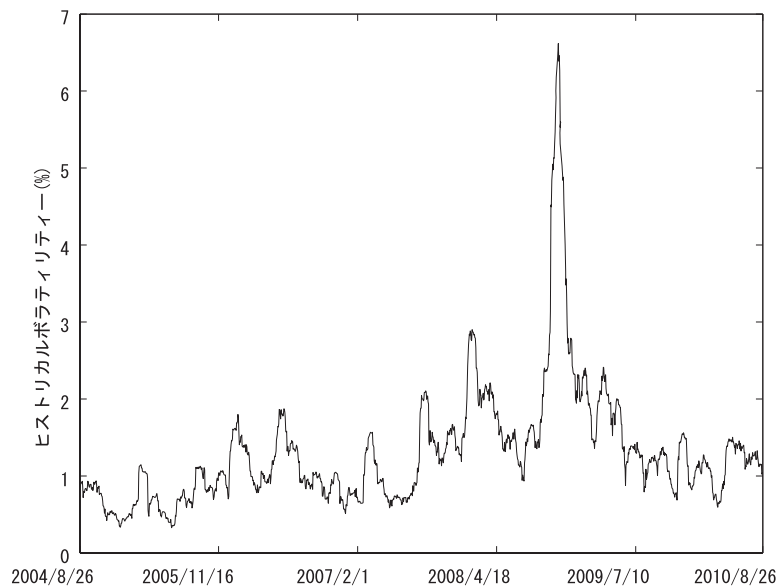


図1.1 TOPIXリターンの20日ヒストリカルボラティリティの推移

あったという事実であり、今後同じような金融危機を引き起こさないためには、金融リスクの計測・管理技術のさらなる発展が必要不可欠であると主張している。また、日本銀行金融機構局（2011）でも、室町（2008）と同様の主張がなされている。

現在、市場リスク管理には Value-at-Risk (VaR) が幅広く用いられている。VaR は、ある一定の確率範囲内で起こりうるポートフォリオの最大損失額として表され、この確率が 99% の VaR を 99% VaR、95% の VaR を 95% VaR と呼ぶ。VaR は、JP モルガンの CEO であった D. Weatherstron が自社のポートフォリオ全体がさらされている市場リスクの大きさを一括して知りたいと考えたことから開発されたリスク指標である。 $\{r_t\}_{t=1}^T$ をリスクファクターの時系列データとし、 T をデータが存在する期間、 Ω_t を時点 t で利用可能な情報とすると、時点 t における $100(1-\theta)\%$ VaR は以下の式を満たす値である。

$$\Pr[r_t < -VaR_t | \Omega_t] = \theta \quad \theta \in (0, 1).$$

VaR は、単純かつわかりやすいリスク指標として幅広く使われているが、VaR がリスク指標として不十分であるということは既に多くの文献¹ で指摘されている。例えば、日本銀行金融機構局（2011）では、VaR の問題点として以下の 4 つを指摘している。

- 〔(イ) 将来のリスクファクター変動が過去の変動と同じとは限らないこと（『定常性の仮定』の問題）
 (ロ) リスクファクター変動に特定の分布（正規分布など）を仮定すると、リスクを過小評価する可能性があること（ファットテイル性の問題）
 (ハ) リスクファクター同士の稀で極端な事象を含めた相関構造やその変化を把握することが困難であること
 (ニ) VaR を超える損失の規模を評価できないこと（テイルリスクの問題）〕

日本銀行金融機構局（2011）では、上記問題点のうち、(イ)、(ロ)、(ハ) については、VaR の推定手法を調整することで影響を弱めることができるが、(ニ) はリスク指標として VaR を使う以上避けられない問題であるとしている。上記問題がある VaR に代わるリスク計測手法として Artzner et al. (1997) で提唱されたのが期待ショートフォールである。期待ショートフォールは、VaR を超える損失の条件付期待値である。よって期待ショートフォールは、上記 VaR の問題点のうち、(ニ) の問題点を克服したリスク指標であるといえる。時点 t における $100(1-\theta)\%$ 期待ショートフォールは、以下の式で表される。

$$-E[r_t | r_t \leq -VaR_t(\theta); \Omega_t]. \quad (1)$$

期待ショートフォールは、テイルリスクの問題を克服している点で VaR より優れたリスク指標であるが、1 つ大きな問題を抱えている。それは、起こる確率の非常に小さい巨大な損失をいかに正確に推計するかという難しい問題である。期待ショートフォールの推定では、分布の裾の平均値をとる必要があるため、この問題は推定値の信頼性を弱めてしまう。

本論文の目的は、テイルリスクの問題を克服している点で、期待ショートフォールが VaR より優れたリスク指標であるにもかかわらず、未だに VaR がリスク指標の主役にいるのはなぜかを考察することである。そのために本論文では、リスク指標として VaR と期待ショートフォール

¹ 例として、Artzner et al. (1997, 1999)、山井・吉羽 (2002) が挙げられる。

ルの推定値を用いた投資を行い、そのパフォーマンスを比較する。投資対象は、TOPIXに完全に連動した投資信託²、投資する期間は、2003年1月9日から2007年1月31日までの1000営業日と2007年2月1日から2011年3月3日までの1000営業日である。投資する期間を2つに分けた理由は、サブプライム問題顕在化前後で結果を比較するためである。VaRや期待ショートフォールの推定には、線形Quantile Regression（以下、線形QR法）を用いる。線形QR法は、被説明変数の分位点を説明変数で回帰する手法で、Koenker and Bassett（1978）によって提唱され、統計分野において用いられているノンパラメトリック推定（分布を仮定しない推定）手法³の一つである。線形QR法によって、VaRは、 β を p 次元のパラメータとし、 \mathbf{x}_t で表される $t-1$ 時点で利用可能な情報から選んだ p 次元の説明変数を用いて、

$$VaR_t = \mathbf{x}_t' \beta \quad (2)$$

と表される。

ヒストリカル法⁴がVaRの推定に過去のリターンデータのみを用いるのに対して、線形QR法によるVaRの推定では、(2)式で示されているように、過去のリターンデータだけでなく、様々なデータを用いることができる。よって、用いるデータをうまく選択することができれば、線形QR法によるVaRの推定は、リターンのみを用いるヒストリカル法によるVaRの推定に比べて、精度の良いものにすることができる。山分（2007）では、1日のラグつきのTOPIXリターン、ダウリターン、ならびにTOPIXリターンの20日ヒストリカルボラティリティーによって線形QR法を用いたVaRを推定することで、線形QR法が、株式ポートフォリオの99% VaRと95% VaRどちらにおいても、ヒストリカル法よりも精度の良いVaR推定方法であることを示している。

本論文の構成は以下の通りである。まず第2節でVaR、期待ショートフォールの定義、推定手法ならびにリスク指標としての優劣評価方法について説明をする。第3節では、TOPIXに関して、95% VaR、95%期待ショートフォールを推定する。そして、リスク指標としてVaRと期待ショートフォールの推定値を用いた投資を行い、そのパフォーマンスを比較する。第4節では、結論と今後の課題を述べる。

2 VaR、期待ショートフォールの定義、推定手法、リスク指標としての優劣評価方法

本節では、本論文で用いるVaR、期待ショートフォールの定義、推定手法、推定精度評価方法について説明する。

² リスクファクターがTOPIXの数値のみなので、本論文で推定したリスク指標は、上記（ハ）の問題点の影響を受けない。

³ 線形QR法は分布を仮定しないので、本論文で推定したリスク指標は、上記（ロ）の問題点の影響を受けない。

⁴ ヒストリカル法は、取り扱いの簡便さから、現在多くの金融機関で用いられているVaR推定手法である。具体的なモデルに関しては、山分（2011）に詳しく述べてある。

2.1 VaR、期待ショートフォールの定義

VaRとは、ある一定の確率範囲内で起こりうるポートフォリオの最大損失額である。VaRは金額で表されずリターンの大きさで表されることも多い。よって本論文では、VaRをリターンの大きさで表すこととする。したがって、 r_t を時点 t のリターンとし、 Ω_{t-1} を時点 $t-1$ で利用可能な情報とすると、時点 t における $100(1-\theta)\%$ VaRは(3)式を満たす VaR_t である。

$$\Pr[r_t < -VaR_t | \Omega_{t-1}] = \theta \quad \theta \in (0, 1). \quad (3)$$

期待ショートフォールは、VaRを超える損失の条件付期待値である。VaRと同じく、本論文では期待ショートフォールをリターンの大きさで表すこととする。したがって、期待ショートフォールは、以下の(4)式で表される。

$$-E[r_t | r_t \leq -VaR_t(\theta); \Omega_t]. \quad (4)$$

2.2 VaR、期待ショートフォールの推定手法

まず本論文でVaRの推定に用いる線形QR法について説明する。次に、線形QR法を用いて期待ショートフォールを推定する方法を説明する。

2.2.1 線形QR法

Koenker and Bassett (1978) は、 r_t の θ 分位点が、(5)式の解 $\hat{\beta}$ を用いて、 $\mathbf{x}_j' \hat{\beta}$ となることを示した。

$$\begin{aligned} & \min_{\beta \in \mathbb{R}^p} \frac{1}{i} \left\{ \sum_{j \in \{j: r_j \geq \mathbf{x}_j' \beta\}} \theta |r_j - \mathbf{x}_j' \beta| + \sum_{j \in \{j: r_j < \mathbf{x}_j' \beta\}} (1-\theta) |r_j - \mathbf{x}_j' \beta| \right\} \quad j = t-1, t-2, \dots, t-i \\ & = \min_{\beta \in \mathbb{R}^p} \frac{1}{i} \sum_{j=t-i}^{t-1} [\theta - I(r_j < \mathbf{x}_j' \beta)] [r_j - \mathbf{x}_j' \beta]. \end{aligned} \quad (5)$$

ここで $(r_{t-1}, r_{t-2}, \dots, r_{t-i})$ をサンプルリターンデータ、 \mathbf{x}_j を $j-1$ 時点で利用可能な情報から選んだ p 次元の説明変数とし、 $I(\cdot)$ は定義関数を表す。

線形QR法によるVaRの推定では、 $g(y|x)$ を y の条件付密度関数としたとき $(1-\theta)\%$ VaRについて(6)式が成り立つ。

$$\theta = \int_{-\infty}^{\mathbf{x} \beta} g(\lambda | \mathbf{x}) d\lambda. \quad (6)$$

Koenker and Bassett (1978) は、(5)式で推定されたパラメータ $\hat{\beta}$ が一致性や漸近正規性をもつことを証明した。(5)式からわかるように、線形QR法では、分布を特定せず直接分位点を求めるところに特徴がある。

線形QR法は、ヒストリカル法と同様に、ポートフォリオのVaR推定にも用いることができる。いま、 k 個の資産について、 j 日目のリターンが

$$R_j = (r_{1,j}, \dots, r_{k,j})'$$

とする。また、 k 個の資産からなるポートフォリオの投資比率を

$$A = (a_1, \dots, a_k)$$

とする。このとき j 日目のポートフォリオリターン \hat{r}_j は、

$$\hat{r}_j = AR_j$$

となる。この手順で構築したポートフォリオリターンデータ $\hat{r}_{t-1}, \dots, \hat{r}_{t-i}$ に対して線形 QR 法を用いることで、ポートフォリオの VaR を推定することができる。

2.2.2 期待ショートフォールの推定手法

$\Pr(r_t < \cdot | \Omega_t) \equiv F_t(\cdot)$ と定義すると、(7) 式の近似が成り立つ。

$$E[r_t 1_{\{r_t \leq \bar{r}\}} | \Omega_t] = \int_{-\infty}^{\bar{r}} \xi dF_t(\xi) \approx \sum_{\xi_i \leq \bar{r}} \xi_i [F_t(\xi_i) - F_t(\xi_{i-1})]. \quad (7)$$

ここで、区間 $[0, 1]$ の分割点 $\{\tau_i\}$ について、それぞれ $100\tau_i\%$ 分位点の推定値を $\text{Quânt}_{\tau_i}(r_t | \Omega_t)$ とする。また、 $\bar{\tau} = \sup\{\tau_i; \text{Quânt}_{\tau_i}(r_t | \Omega_t) \leq \bar{r}\}$ とする。すると (10) 式が成り立つ。

$$\sum_{\xi_i \leq \bar{r}} \xi_i [F_t(\xi_i) - F_t(\xi_{i-1})] = \sum_{\tau_i \leq \bar{\tau}} \text{Quânt}_{\tau_i}(r_t | \Omega_t) [\tau_i - \tau_{i-1}]. \quad (8)$$

よって、(9) 式の近似が成り立つ。

$$E[r_t | r_t \leq \bar{r}; \Omega_t] = \frac{\int_{-\infty}^{\bar{r}} \xi dF_t(\xi)}{\int_{-\infty}^{\bar{r}} dF_t(\xi)} \approx \frac{\sum_{\tau_i \leq \bar{\tau}} \text{Quânt}_{\tau_i}(r_t | \Omega_t) [\tau_i - \tau_{i-1}]}{\bar{r}}. \quad (9)$$

2.3 リスク指標としての優劣評価方法

VaR の推定精度評価方法としては、バックテストが最も一般的である。期待ショートフォールの推定精度評価方法としては、Embrechts et al. (2004) の評価値がある。しかし、これらの評価方法は、異なる手法で推定された VaR 同士、期待ショートフォール同士の精度を比較するものであり、リスク指標として VaR と期待ショートフォールとのどちらが優れているかを比較できるものではない。そのため本論文では、VaR をリスク指標とした投資と期待ショートフォールをリスク指標とした投資を実際に行い、その投資パフォーマンスを比較することで、VaR と期待ショートフォールの優劣を判断する。

まず、どのような投資を行うかを VaR を例に挙げて述べる。なお、VaR をリスク指標とした投資と期待ショートフォールをリスク指標とした投資の仕組みは同じである。ある資産に対して、過去一定期間の VaR を推定する。そして、その推定値の平均と現在の VaR の推定値を比較し、現在負っているリスクが過去の平均になるようにエクスポージャーを決定する。例えば、過去一定期間の VaR 推定値の平均が 4%、現在の VaR 推定値が 5% の場合、エクスポージャーは全資産の 80% とする。そして、残りの 20% は無リスク資産に投資する。

次に、投資パフォーマンスの評価方法について述べる。本論文で用いる投資パフォーマンス評価の指標は、ジェンセンのアルファである。 $r_{j,t}$ を投資 j の時点 t におけるリターン、 $r_{f,t}$ を無リスク資産の時点 t におけるリターン、 $r_{M,t}$ をマーケットポートフォリオの時点 t におけるリターン、 $\epsilon_{j,t}$ を誤差項としたとき、ジェンセンのアルファは、(10) 式で表される回帰式を推定して得られる α である。

$$r_{j,t} - r_{f,t} = \alpha + \beta (r_{M,t} - r_{f,t}) + \epsilon_{j,t} \quad (10)$$

(10)式より、ジェンセンのアルファが正ならば、投資*j*は基準となるマーケットポートフォリオと比較してリスクに見合った以上のリターンを上げていることになり、投資パフォーマンスが高いことになる。そして、逆にジェンセンのアルファが負ならば、投資*j*の投資パフォーマンスは低いことになる。

3 推定結果

本論文では、VaRの推定の為に、1992年10月19日から2011年3月3日までのTOPIXの日次リターンデータを用いる。表3.1は、本論文で用いるTOPIXリターンデータ全体の基本統計量を表している。データ全体では、尖度が正規分布の3を超えているので、第1章で述べたように、TOPIXリターンデータの分布に正規分布を仮定すると、ファットテイル性の問題が発生することがわかる。第1章で述べたように、線形QR法では、様々な指標をVaRの推定に取り込むことができる。本論文では、1日のラグつきのTOPIXリターンとTOPIXリターンの20日ヒストリカルボラティリティ⁵を用いて、線形QR法によりTOPIXの95% VaRを推定する。上記指標を用いる理由は、TOPIXの将来を予測する上で、これらの指標が投資家にとって特に重要視されているからである。

表3.1 TOPIXリターンの基本統計量

	TOPIX
平均	-0.0072
標準偏差	1.3405
最大	12.8646
最小	-10.0071
歪度	-0.1413
尖度	8.6130

* データは全て%表記に変換したものをを用いている

3.1 投資パフォーマンスに関する結果

本論文の線形QR法を用いたVaRの推定では、最初の20日分をTOPIXの20日ヒストリカルボラティリティの計算のみに使い、過去2019日分のデータから次の日の95% VaRを推定している。95%期待ショートフォールの推定に関しては、以下の手順で行う。まず、区間 [0, 1] の分割点 $\{\tau_i\}$ を0.001から0.001刻みで0.05までの50個の数の集合とする。次に、線形QR法を用いて $100\tau_i\%$ 分位点の推定値である $\text{Quant}_{\tau_i}(r_t | \Omega_t)$ を推定する。最後に、(9)式を使うことで、期待ショートフォールの推定値を得る。

そして、95% VaRと95%期待ショートフォールに関して、それぞれの過去500日の推定値の平均と現在の推定値を比較し、現在負っているリスクが過去の平均になるようにエクスポージャーを決定する。この投資を、2003年1月9日から2007年1月31日までの1000営業日と

⁵ 過去20日分のTOPIXリターンから計算したヒストリカルボラティリティ

2007年2月1日から2011年3月3日までの1000営業日で行い、それぞれの期間でジェンセンのアルファを計測する。

表3.2は、2003年1月9日から2007年1月31日までの1000営業日に関する投資結果である。表の1列目の数値は、VaRをリスク指標として活用した投資の結果を、表の2列目の数値は、期待ショートフォールをリスク指標として活用した投資の結果を、表の3列目の数値は、リスク指標を活用しない投資の結果（投資期間中のTOPIXリターンそのもの）を表している。

表3.2 2003年1月9日から2007年1月31日までの投資結果

	VaR	期待ショートフォール	TOPIX
平均	0.0839	0.0849	0.0718
標準偏差	1.1128	1.1281	1.0862
ジェンセンのアルファ	0.0120	0.0122	0
(P値)	(0.1162)	(0.1287)	(0)
最大	4.2921	4.4577	3.5403
最小	-5.6109	-5.8146	-5.8458

*平均、標準偏差、最大、最小は%表記に変換したものをを用いている

表3.2によると、VaR、期待ショートフォールどちらの投資においても、リスク指標を活用しない場合に比べて、リターンの平均と標準偏差が増大している。標準偏差が増大しているということは、よりリスクを負っていることになるが、ジェンセンのアルファが正になっていることから、VaR、期待ショートフォールどちらの投資においても、リスク指標を活用しない場合に比べて、投資パフォーマンスが高まっているといえる。しかし、ジェンセンのアルファのP値は、VaR、期待ショートフォールどちらの投資においても、10%水準でも有意になっておらず、統計的には、リスク指標を活用しない場合に比べて、投資パフォーマンスに違いがないことになる。また、VaR、期待ショートフォールどちらの投資においても、リスク指標を活用しない場合に比べて、投資期間中の最大、最小リターンがともに大きくなっていることがわかる。このことも、VaR、期待ショートフォールを活用したリスク管理が投資のパフォーマンスを上げる1つの証拠となっている。VaR、期待ショートフォールそれぞれの投資結果は、ほとんど変わらない。ジェンセンのアルファを見ると、わずかに期待ショートフォールの投資パフォーマンスがVaRの投資パフォーマンスを上回っているが、差はわずかである。

表3.3は、2003年1月9日から2007年1月31日までの1000営業日に関する投資結果である。表3.3によると、全ての投資において、平均が負となっているが、VaR、期待ショートフォー

表3.3 2007年2月1日から2011年8月26日までの投資結果

	VaR	期待ショートフォール	TOPIX
平均	-0.0508	-0.05272	-0.0596
標準偏差	1.5933	1.5756	1.7404
ジェンセンのアルファ	-0.0038	-0.0055	0
(P値)	(0.8808)	(0.8205)	(0)
最大	5.8821	5.9339	12.8646
最小	-6.2706	-5.8569	-10.0071

*平均、標準偏差、最大、最小は%表記に変換したものをを用いている

ルどちらの投資においても、リスク指標を活用しない場合に比べて、リターンの平均は増大している。一方、標準偏差は、VaR、期待ショートフォールどちらの投資においても、リスク指標を活用しない場合に比べて減少している。よって、よりリスクを減らしつつ、平均を上げることに成功しているといえるが、ジェンセンのアルファは負になっていることから、VaR、期待ショートフォールどちらの投資においても、リスク指標を活用しない場合に比べて、投資パフォーマンスが弱まっているといえる。しかし、ジェンセンのアルファのP値は、VaR、期待ショートフォールどちらの投資においても、非常に高く、統計的には、リスク指標を活用しない場合に比べて、投資パフォーマンスに違いがないことになる。また、VaR、期待ショートフォールどちらの投資においても、リスク指標を活用しない場合に比べて、投資期間中の最大リターンが減少し、最小リターンが増大していることがわかる。よって、リスク指標を活用することで、リターンが極端に悪くなる場合を排除できた一方で、リターンが極端に高くなる機会も失っていることがわかる。VaR、期待ショートフォールそれぞれの投資結果は、あまり変わらない。ジェンセンのアルファを見ると、こちらの期間では、わずかにVaRの投資パフォーマンスが期待ショートフォールの投資パフォーマンスを上回っているが、差はわずかではない。

表3.2は、サブプライム問題顕在化前のリターンが安定的に変動していた期間の投資結果を、表3.3は、サブプライム問題顕在化後のリターンが激しく変動していた期間の投資結果それぞれ表している。よって、表3.2、表3.3の結果を比較すると、リターンの変動が安定的な期間では、VaR、期待ショートフォールを活用したリスク管理の効果があるが、リターンの変動が激しい期間では、その効果が低くなることがわかる。また、VaRを活用したリスク管理よりも期待ショートフォールを活用したリスク管理のほうが、サブプライム問題顕在化前にはわずかに投資パフォーマンスが良いが、サブプライム問題顕在化後にはその関係が逆になっていることがわかる。つまり、VaRを活用したリスク管理よりも期待ショートフォールを活用したリスク管理のほうが、サブプライム問題顕在化前後でリスク管理の効果の低下が強いことがわかる。

3.2 パラメータ推定に関する結果

表3.4は、2007年1月31日におけるTOPIXの95% VaRと95%期待ショートフォールのパラメータ推定値ならびにWaldテストを用いて計算した95% VaRのパラメータ推定値のP値を示している。表3.4によると、定数項は95% VaR、95%期待ショートフォールともに正となっている。また、1日のラグ付きポートフォリオリターン項のパラメータは、95% VaR、95%期待ショートフォールともに負になっているので、前日のTOPIXリターンがプラスになれば、VaRや期待ショートフォールを押し下げ、マイナスになれば、VaRや期待ショートフォールを押し上げることになる。ヒストリカルボラティリティ項のパラメータについては、95% VaR、95%期待ショートフォールともに正となっている。よって、ヒストリカルボラティリティが増加すれば、VaRや期待ショートフォールも増加し、ヒストリカルボラティリティが減少すれば、VaRや期待ショートフォールも減少することがわかる。表3.5は、2011年3月3日におけるTOPIXの95% VaRと95%期待ショートフォールのパラメータ推定値ならびにWaldテストを用いて計算した95% VaRのパラメータ推定値のP値を示している。表3.5の結果と、表3.4の結果を比較すると以下のことがわかる。まず、サブプライム問題顕在化前後でパラメータ推

表3.4 線型QR法のパラメータ推定結果 (2007年1月31日)

	95% VaR	95%期待ショートフォール
定数項 (P 値)	0.6194 (0.0491)	1.0271
1日のラグ付き TOPIX リターン項 (P 値)	- 0.2675 (0.0000)	- 0.3312
ヒストリカルボラティリティ項 (P 値)	1.1503 (0.0001)	1.3451

表3.5 線型QR法のパラメータ推定結果 (2011年3月3日)

	95% VaR	95%期待ショートフォール
定数項 (P 値)	0.3214 (0.3460)	0.6934
1日のラグ付き TOPIX リターン項 (P 値)	- 0.2088 (0.0014)	- 0.3469
ヒストリカルボラティリティ項 (P 値)	1.4993 (0.0000)	1.7861

定値の符合は同じであるので、1日のラグつきの TOPIX リターンと TOPIX リターンの20日ヒストリカルボラティリティが VaR と期待ショートフォールに与える影響の方向性は変わらない。しかし、サブプライム問題顕在化後にヒストリカルボラティリティの影響力が強まっていることがわかる。そして、サブプライム問題顕在化後の定数項の P 値が非常に高くなっていることから、サブプライム問題顕在化後に、VaR の推定がより困難になっていることがわかる。

4 結論と今後の課題

本論文では、テイルリスクの問題を克服している点で、期待ショートフォールが VaR より優れたリスク指標であるにもかかわらず、未だに VaR がリスク指標の主役にいるのはなぜかを考察する目的のもと、リスク指標として VaR と期待ショートフォールの推定値を用いた投資を行い、そのパフォーマンスを比較した。さらに、投資する期間をサブプライム問題顕在化前後で2つに分け結果を比較した。また、VaR と期待ショートフォールの推定に線型 QR 法を活用することで得られたパラメータ推定値を分析した。

結果として、サブプライム問題顕在化前のリターン変動安定期には、統計的に有意とはならなかったものの、リスク管理は効果があり、サブプライム問題顕在化後のリターン変動不安定期には、リスク管理は効果がなかった。この結果に関しては、第1章で記した「定常性の仮定の問題」が影響していると考えられる。つまり、サブプライム問題が顕在化したことによって、将来の TOPIX リターンの変動が過去のサブプライム問題顕在化前の変動と変わってしまったにもかかわらず、VaR や期待ショートフォールの推定にサブプライム問題顕在化前のリターンデータを用いざるをえないことが、VaR や期待ショートフォールの推定値とそれを用いたリスク管理に悪影響を与えていということである。このことは、線型 QR 法のパラメータ推定結果からもいえた。また、VaR を活用したリスク管理よりも期待ショートフォールを活用し

たりリスク管理のほうが、サブプライム問題顕在化前後でリスク管理の効果の低下が強いことがわかった。よって、以下のことがいえる。テイルリスクを比較的正確に推定しやすいサブプライム問題顕在化前のリターン変動安定期には、テイルリスクを考慮に入れる期待ショートフォールはテイルリスクを考慮に入れないVaRより優れた投資パフォーマンスを示すリスク指標である。しかし、サブプライム問題顕在化後のリターン変動不安定期には、テイルリスクを考慮する際の、起こる確率の非常に小さい巨大な損失をいかに正確に推計するかという問題によるデメリットが、テイルリスクを考慮に入れるというメリットを上回ることによって、期待ショートフォールはVaRより劣った投資パフォーマンスを示すリスク指標になっている。つまり、「定常性の仮定の問題」の悪影響は、VaRよりも期待ショートフォールのほうが強いといえる。

以上の結果より、テイルリスクの問題を克服している点で、期待ショートフォールがVaRより優れたリスク指標であるにもかかわらず、「定常性の仮定の問題」の悪影響は、VaRよりも期待ショートフォールのほうが強いという点が、未だにVaRがリスク指標の主役にいる要因となっていると考えられる。

今後の課題としては、特に「定常性の仮定の問題」の悪影響を抑える方向でのVaRや期待ショートフォールの推定精度向上が挙げられる。例えば、分布の変化をモデル化する手法に、Regime Switchingモデルがある。このRegime Switchingモデルを用いて得られるリターンの分布の変化を表す変数を線形QR法の説明変数として取り込むことができれば、リターンの分布が急激に変化する（つまり「定常性の仮定の問題」の悪影響が強い）状況でも推定精度の高いVaRや期待ショートフォール推定方法が得られるのではないかと考えている。

参考文献

- 安藤美孝 [2004]、「ヒストリカル法によるバリュエーション・アット・リスクの計測：市場価格変動の非正常性への実務的対応」『金融研究』23（別冊2）。
- 木島正明編著 [1998]、『金融リスクの計量化【上】バリュエーション・アット・リスク』金融財政事情研究会。
- 日本銀行金融機構局 [2011]、「国際金融危機の教訓を踏まえたリスク把握のあり方」。
- 室町 [2008]、「(リスク管理)：世界的な金融危機は更なるリスク管理技術の進展を求めている」『年金ストラテジー』第150巻。
- 山井・吉羽 [2002]、「バリュエーション・アット・リスクと期待ショートフォールの比較分析」『Journal of the Operations Research Society of Japan』第45巻4号、490-506。
- 山下智志 [2000]、『市場リスクの計量化とVaR』朝倉書店。
- 山分俊幸 [2007]、「Quantile Regressionとヒストリカル法を用いたValue-at-Risk推定の精度比較」『名古屋商科大学総合経営・経営情報論集』第51巻2号。
- 山分俊幸 [2011]、「サブプライム問題がValue-at-Risk推定に与えた影響」『名古屋商科大学総合経営・経営情報論集』第55巻2号。
- Artzner, P., F. Delbaen, J. M. Eber, and D. Heath, "Thinking coherently", *Risk*, 11(5), 1997, pp. 68-71.
- Artzner, P., F. Delbaen, J. M. Eber, and D. Heath, "Coherent measures of risk", *Mathematical Finance*, 9, 1999, pp. 203-228.
- Barone-Adesi, G., K. Giannopoulos, and L. Vosper, "VaR without Correlations for Non-linear Portfolios", *Journal of Futures Markets*, 19, 1999, pp. 583-602.
- Boudoukh, J., M. Richardson, and R. Whitelaw, "The Best of Both Worlds", *RISK*, 11(5), 1998, pp. 64-67.
- Embrechts, P., R. Kaufmann and P. Patie, "Strategic long-term financial risks: Single risk factors" *Computational Optimization and Applications*, 32, 2004, pp. 61-90.
- Ferguson, T. S. [1967], *Mathematical Statistics: A Decision Theoretic Approach*, Academic Press.

- Hull, J. and A. White, “Incorporating Volatility Updating into the Historical Simulation Method for Value at Risk”, *Journal of Risk*, 1, 1998, pp. 5–19.
- Koenker, R. [2005], *Quantile Regression*, Cambridge University Press.
- Koenker, R. and G. Bassett, “Regression quantiles”, *Econometrica*, 46, 1978, pp. 33–50.
- White, H. [1994], *Estimation, Inference and Specification Analysis*, Cambridge University Press.