連続時間モデルにおけるFTPLの批判的検討

鐘　田　　　亨

概　　要

本稿では、FTPLに関する日本語の標準的なテキストである渡辺・岩村（2004，第2章）のモデルを連続時間モデルに変更する。これにより（1）通常の分権型経済における家計の最適化行動と同じ枠組みから、FTPLの基本式が得られることが示された。（2）NPG条件は家計の最適解の必要十分条件を構成している。このことからリカーディアン型財政政策ルールと非リカーディアンの違いを明かにした。(3)$s_t=\bar{s}_t+\gamma_b(b_t-\bar{b})$という特定の調整ルールを仮定した場合、リカーディアン型財政政策ルールである条件は$\gamma_b>0$であること、局所的リカーディアン型財政政策ルールである条件は$\gamma_b>r$であることを示した。

1　はじめに

本稿執筆時には、ギリシア政府の財政粉飾の露呈をきっかけとするユーロ危機が世界的な問題となっている。

購買力平価が成り立っているとすれば、為替レートの変化率は物価変化率の違いによって決まる。物価水準についての最も基本的な理論は貨幣数量説であろう。$PV=MT$，つまり貨幣の流通速度Vと実質生産Tを一定とすれば、物価水準Pは貨幣供給Mに比例する。しかし、これだけではなぜ財政問題が通貨価値下落に通じるのか説明できない。FTPL（Fiscal Theory of the Price Level：物価の財政理論）が注目を集めることになると予想される。

FTPLを簡単に説明しよう。マネタリーベースは中央銀行の負債である。一方、中央銀行の主たる資産は国債である。バランスシートは資産と負債が一致しないといけない。資産である国債の実質価値が低下すれば、マネタリーベースの実質価値も低下しなければならない。マネタリーベースを一定とすれば物価は上昇しなければならない。

では、FTPLの理論的妥当性はどのように考えられるだろうか。

FTPLの文献では、離散時間でモデル化されることが多い[1]。離散時間のモデルでは差分方程式が主役となる。差分方程式では端点の処理が面倒であり、解も、少なくとも初等解法によって解ける微分方程式より複雑になりがちである。そのため離散時間モデルでは、モデルの本質的な部分が何なのかを把握しづらいきらいがある。

そこで本稿では、FTPLに関する日本語の標準的なテキストである渡辺・岩村（2004，第2章）のモデルを連続時間モデルに変更する。2節では、家計の最適化行動の結果として、NPG条件とフィッシャー式を導出する。NPG条件が満たされるとき、家計の通時的な予算制約式が得られる。3節では、家計の通時的な予算制約式とフィッシャー式から、FTPLの基本式を導く。4節ではリカーディアン型財政政策ルールの意味について論じる。最後に、以上で展開

---

[1] 例えばCochrane（2001）やWoodford（2003）を参照せよ。

したFTPLのモデルについて、問題点を指摘する。

2 家計の最適化問題

目的関数 代表的な家計を考える。家計数および人口は一定であると仮定する。家計は初期時点$t=0$における効用U_0を最大化すると仮定する。政府の消費支出は家計の効用に影響を与えないと仮定する。U_0を、各時点における効用の割引現在価値の合計として定義する。

$$U_0 \equiv \int_0^\infty u(c_t)\exp(-\beta t)\,dt$$

上式においてc_tは時点tにおける実質消費、$u(\ )$は各時点における効用関数、βは正の定数であり、主観的割引率を表す。

予算制約式 完全雇用を仮定する。家計は貯蓄により、国債の保有を増やすか、貨幣の保有を増やす。これは暗黙に、投資はゼロで資本は一定、したがって実質生産（＝実質所得）も一定となることを仮定している。

家計の保有する資産W_tは国債残高B_tと貨幣M_tとに分けられる。

$$W_t \equiv B_t + M_t$$

国債の名目利子率をi_tとする。時点tにおける国債保有がB_tであれば、受け取る利子は

$$i_t B_t = i_t(W_t - M_t)$$

となる。

このとき家計の予算制約式は次式の形をとる。

$$\dot{W}_t = (P_t y_t - T_t - P_t c_t - i_t M_t) + i_t W_t \tag{1}$$

P_tは物価、y_tは実質所得、T_tは名目の納税額である。ドット記号は時間についての微分を表わす($\dot{W}_t = dW_t/dt$)。$i_t M_t$は貨幣保有の機会費用であり、政府のシニョレッジ（貨幣発行権益）となる。

NPG条件 No-Ponzi-Game条件（以下NPG条件）は以下のように表される。

$$\lim_{T\to\infty} W_T \exp\left(-\int_0^T i_t\,dt\right) = 0 \tag{2}$$

これは時点Tにおける家計の名目資産W_Tを名目利子率で割り引いた現在価値が、$T\to\infty$のときゼロになるというものである。

家計の予算制約式(1)をW_tについての微分方程式として考えよう。この解は

$$W_T = \int_0^T \exp\left(\int_t^T i_\tau\,d\tau\right)(P_t y_t - T_t - P_t c_t - i_t M_t)\,dt + W_0 \exp\left(\int_0^T i_t\,dt\right)$$

となる。両辺に $\exp(-\int_0^T i_t\,dt)$ を乗じて現在価値になおすと

$$W_T \exp\left(-\int_0^T i_t\,dt\right) = \int_0^T \exp\left(-\int_0^t i_\tau\,d\tau\right)(P_t y_t - T_t - P_t c_t - i_t M_t)\,dt + W_0 \tag{3}$$

となる。NPG条件(2)が成り立てば、$T \to \infty$ のとき、(3)の左辺はゼロとなる。したがって

$$\int_0^\infty \exp\left(-\int_0^t i_\tau\,d\tau\right)(P_t y_t - T_t - P_t c_t - i_t M_t)\,dt + W_0 = 0 \tag{4}$$

となる。(4)は、NPG条件(2)が成り立つとき、名目消費の現在価値 $\int_0^\infty \exp(-\int_0^t i_\tau\,d\tau)P_t c_t\,dt$ が、初期の資産 W_0 と人的資産の名目現在価値 $\int_0^\infty \exp(-\int_0^t i_\tau\,d\tau)(P_t y_t - T_t - i_t M_t)\,dt$ に合計に等しくなると解釈できる。

家計の最適化行動　現在価値ハミルトニアンを次のように定義する。

$$H_t \equiv u(c_t)\exp(-\beta t) + \mu_t[(P_t y_t - T_t - P_t c_t - i_t M_t) + i_t W_t]$$

μ_t は共役状態変数である。経常値共役状態変数を $\lambda_t \equiv \mu_t \exp(\beta t)$ と定義する。$\mu_t = \lambda_t \exp(-\beta t)$ となる。

最適解のための必要十分条件は $\partial H_t/\partial c_t = 0,\ \dot{\mu}_t = -\partial H_t/\partial W_t,\ \lim_{t\to\infty} \mu_t W_t = 0$ である。

$$\begin{aligned}\frac{\partial H_t}{\partial c_t} &= u'(c_t)\exp(-\beta t) - \mu_t P_t \\ &= [u'(c_t) - \lambda_t P_t]\exp(-\beta t)\end{aligned} \tag{5}$$

$$\dot{\mu}_t = \dot{\lambda}_t \exp(-\beta t) - \lambda_t \exp(-\beta t)\beta \tag{6}$$

$$\frac{\partial H_t}{\partial W_t} = \mu_t i_t = \exp(-\beta t)\lambda_t i_t \tag{7}$$

$\exp(-\beta t) > 0$ なので、(5)より最適解の条件として

$$u'(c_t) = \lambda_t P_t \tag{8}$$

を得る。また(6), (7)より

$$\dot{\lambda}_t = (\beta - i_t)\lambda_t \tag{9}$$

を得る。

経常値共役状態変数 λ_t ではなく、共役状態変数 μ_t を用いれば、(9)は $\dot{\mu}_t = -i_t \mu_t$ と書き直せる。これを解くと $\mu_t = \mu_0 \exp(-i_t t)$ となる。したがって $\mu_0 \neq \infty$ である限り、横断面条件 $\lim_{t\to\infty} \mu_t W_t = 0$ とNPG条件(2)は等しい。

フィッシャー式　(8)より $\lambda_t = u'(c_t)/P_t$ なので

$$\begin{aligned}\dot{\lambda}_t &= [u''(c_t)\dot{c}_t P_t - u'(c_t)\dot{P}_t] \\ &= u''(c_t)\dot{c}_t/P_t - u'(c_t)\dot{P}_t/P_t^2\end{aligned} \tag{10}$$

である。(8)，(9)および(10)より

$$u''(c_t)\dot{c}_t/P_t - u'(c_t)\dot{P}_t/P_t^2 = (\beta - i_t)u'(c_t)/P_t$$

となる。したがって

$$i_t = -\frac{u''(c_t)c_t}{u'(c_t)}\frac{\dot{c}_t}{c_t} + \beta + \dot{P}_t/P_t$$

を得る。右辺第2項は物価変化率を表す。異時点間の代替の弾力性$-u'(c_t)/u''(c_t)c_t$をσ_tで表すことにすると

$$i_t = [\sigma_t^{-1}\dot{c}_t/c_t + \beta] + \dot{P}_t/P_t$$

となる。右辺第1項を実質利子率r_tと定義すると

$$i_t = r_t + \dot{P}_t/P_t \tag{11}$$

を得る。(11)は、名目利子率が実質利子率と物価変化率の合計に等しいというフィッシャー式である。

3　初期時点における物価の決定

家計の予算制約式(1)とNPG条件(2)が成り立てば、家計の通時的予算制約式(4)が成り立つ。投資がゼロという仮定のため、実質生産（＝実質所得）y_tは、家計の実質消費c_tと政府の実質消費g_tの合計に等しくなる。したがって(4)は次のように書き直せる。

$$W_0 = \int_0^\infty \exp\left(-\int_0^t i_\tau d\tau\right) P_t (T_t/P_t - g_t + i_t M_t/P_t)\,dt \tag{12}$$

(12)の名目利子率にフィッシャー式(11)を代入する。

$$W_0 = \int_0^\infty \exp\left[-\int_0^t (r_\tau + \dot{P}_\tau/P_\tau)\,d\tau\right] P_t (T_t/P_t - g_t + i_t M_t/P_t)\,dt \tag{13}$$

ここで

$$\begin{aligned}\exp\left[-\int_0^t (r_\tau + \dot{P}_\tau/P_\tau)\,d\tau\right] &= \exp\left[-\int_0^t r_\tau d\tau - \int_0^t \frac{1}{P_\tau}dP_\tau\right] \\ &= \exp\left[-\int_0^t r_\tau d\tau - (\ln P_t - \ln P_0)\right] \\ &= \exp\left(-\int_0^t r_\tau d\tau\right) P_0/P_t\end{aligned}$$

である。政府の実質財政余剰$T_t/P_t - g_t$をs_tで表せば、(13)は次のように書き直せる。

$$\frac{W_0}{P_0}=\int_0^\infty \exp\left(-\int_0^t r_\tau d\tau\right)(s_t+i_t M_t/P_t)\,dt \tag{14}$$

(14)の左辺は初期時点における家計の名目資産W_0の実質価値を表す[2]。(14)は、初期時点における政府の実質負債が、将来の実質の財政余剰とシニョレッジを実質利子率で割り引いた現在価値の合計に等しくなるように、初期時点における物価P_0が決まるという、FTPLの基本式を意味する。

4　財政政策ルール

4.1　リカーディアン型財政政策ルール

単純化のために、実質利子率は一定（$r_t=r$）と仮定しよう。FTPLの基本式(14)において、W_0は初期値として所与である。したがって$s_t(t\in[0,\infty])$が決まれば、初期時点における物価P_0が決まる。

さらに、単純化のために貨幣は存在しないと仮定しよう[3]。この場合、家計の資産は国債残高に等しい。時点tにおける実質国債残高W_t/P_tをb_tで表すことにする。

これらの仮定の下、FTPLの基本式(14)は次式のように書き直すことができる。

$$b_0=\int_0^\infty e^{-rt}s_t\,dt$$

したがって時点tにおける実質国債残高b_tは

$$b_t=\int_0^\infty e^{-r(\tau-t)}s_\tau\,d\tau \tag{15}$$

となる。(15)の両辺を時間tで微分すると次式を得る。

$$\dot{b}_t=r\,b_t-s_t \tag{16}$$

(16)は、時点tにおける実質の国債の利払い$r\,b_t$と実質の財政赤字$-s_t$の合計をファイナンスするために国債残高を変化させると解釈することができる。

FTPLの基本式(14)は、家計の最適化行動から導かれた。家計の最適化行動は、NPG条件(2)を仮定している。したがって(16)においても、NPG条件(2)が満たされなければならない。ここでもう一度、NPG条件(2)について考えてみよう。名目利子率i_tがフィッシャー式(11)を満たすとすると

2　これは同時に初期時点における実質国債残高でもある。

3　http://www.mof.go.jp/jgbs/reference/gbb/2306.htmlによれば、平成23年6月末現在の国債及び借入金現在高は約944兆円である。一方で、http://www.boj.or.jp/statistics/boj/other/mb/base1109.pdfによれば、2011年9月のマネタリーバランスの平均残高は約1兆1400億円にすぎない。

$$W_T \exp\left(-\int_0^T i_t\, dt\right) = W_T \exp\left[-\int_0^T (r_t + \dot{P}_t / P_t)\, dt\right]$$
$$= W_T \exp\left(-\int_0^T r_t\, dt\right) \exp[-(\ln P_T - \ln P_0)] \tag{17}$$
$$= \frac{W_T}{P_T} P_0 \exp\left(-\int_0^T r_t\, dt\right)$$

となる。したがって初期時点の物価$P_0 \neq \infty$であればNPG条件(2)は

$$\lim_{T\to\infty} b_T \exp\left(-\int_0^T r_t\, dt\right) = 0 \tag{18}$$

と書き直せる。つまりNPG条件(2)が成り立つためには、$T \to \infty$のとき、実質国債残高を実質利子率で割り引いた現在価値はゼロにならなければならない。

外生的に与えられる物価のパスにかかわらず、政府がNPG条件(18)を満たすように財政余剰s_tを調整するという財政政策ルールは、リカーディアン型財政政策ルールとよばれる(Woodford, 1994, 1995)。

たとえ財政政策ルールが非リカーディアンであったとしても、家計の最適化行動を前提とする限りNPG条件は満たされる。名目の国債残高が発散することを許容したとしても、政府が実質国債残高を実質利子率以上の速度で増加させる政策ルールは不可能である。(17)で$W_T \exp(-\int_0^T i_t\, dt) = W_T \exp[-\int_0^T (r_t + \dot{P}_t/P_t)\, dt]$であったことを思い出そう。名目国債残高の増加率および実質利子率が一定の場合

$$\text{物価上昇率} > \text{名目国債残高の増加率} - \text{実質利子率} \tag{19}$$

であればNPG条件(2)は満たされる。したがって物価上昇率は(19)を満たすように決まる。

なおWoodford(1998) は、実質国債残高が有限値に収束するという条件を局所的リカーディアンと呼んでいる。

4.2 特定化された調整ルールの下で

政府が実質財政余剰s_tを

$$s_t = \bar{s}_t + \gamma_b (b_t - \bar{b}) \tag{20}$$

にしたがって調整すると仮定する。パラメータ γ_bが正のとき(20)は次のように解釈できる。すなわち政府は実質国債残高に目標水準$\bar{b}$をあらかじめ決めており、実際の国債残高がこれを上回ったときには増税などの財政余剰増加措置をとり、逆に下回ったときには財政余剰減少措置をとる。目標実質財政余剰$\bar{s}$については、$\bar{s} = r\bar{b}$を満たすものとする[4]。

実質国債残高についての微分方程式(16)の右辺のs_tに財政政策ルール(20)を代入すると次式が得られる。

[4] したがって(20)は、$s_t = r\bar{b} + \gamma_b (b_t - \bar{b})$と書き直せる。

$$\begin{aligned}\dot{b}_t &= rb_t - [r\bar{b} + \gamma_b (b_t - \bar{b})] \\ &= (r - \gamma_b)\, b_t - (r - \gamma_b)\bar{b}\end{aligned}$$

$\gamma_b = r$のときには$\dot{b}_t = 0$となるので、$b_T = b_0$という定数解が得られる。実質国債残高が定数であれば、NPG条件(18)は満たされる。したがって$\gamma_b = r$という政策ルールはリカーディアンである。

$\gamma_b \neq r$のときには次の解が得られる。

$$b_T = (b_0 - \bar{b})\, e^{(r-\gamma_b)T} + \bar{b} \tag{21}$$

したがって

$$b_T \exp(-rT) = (b_0 - \bar{b})\, e^{-\gamma_b T} + \bar{b}e^{-rT}$$

となる。調整ルール(20)を前提とすると、政府がリカーディアンであるための条件は$\gamma_b > 0$となる。

また(21)より、政府が局所的リカーディアンであるための条件は$\gamma_b > r$である。政府が局所的リカーディアンであれば、$T \to \infty$のとき実質国債残高は$\bar{b}$に収束する。

5　おわりに

本稿ではFTPLを連続時間モデルで展開した。そのことにより、リカーディアン型財政政策ルールと非リカーディアン型財政ルールの違い、特定化された調整ルールの下での財政政策ルールがリカーディアンであるか非リカーディアンであるかの条件が明確に示された。

では初期時点における政府の実質負債が、将来の実質の財政余剰の割引現在価値の合計に等しくなるように初期時点における物価が決まるという、FTPLの基本式(14)はどのように評価できるだろうか。FTPLでは、暗黙に、投資はゼロで資本は一定であることを仮定している。このため、家計の貯蓄が財政赤字に、財政余剰が家計の負の貯蓄に等しくなる[5]。つまりFTPLの基本式は、初期時点における家計の実質資産が、家計の負の貯蓄の現在価値に等しくなるように初期時点における物価が決まると、読み替えることができる。政府から見ても家計から見ても、資産と負債は等しくなければならないと言ってしまえばそれまでだが、この逆説的な表現をどのように解釈して良いのか、現段階では分からない。今後の研究課題としたい。

連続時間モデルで展開された場合、FTPLの基本式(14)の導出過程と通常の分権型経済における家計の最適化行動の類似に気付く。投資はゼロで資本は一定という仮定を外すと、W_0には国債と貨幣だけなく、資本が含まれる。国民経済計算2009年度確報[6]によれば、平成21暦年末における生産資産は約1200兆円、有形非生産資産もほぼ同額である。これらは(14)の左辺の分子として無視できない大きさである。右辺についても再考が必要であろう。また投資が無いと仮定しているため、完全雇用を仮定すれば、実質生産（＝実質所得)y_tは一定となる。資本蓄積により生産が変化する場合、結論がどのように変わるのか、これらについても今後の

5　財政余剰は国債残高、すなわち家計の資産を減らす。

6　http://www.esri.cao.go.jp/jp/sna/kakuhou/kekka/h21_kaku/h21_kaku_top.html

研究課題としたい。

参考文献

Blanchard, Oliver Jean and Stanley Fischer (1989) *Lectures on Macroeconomics*, Cambridge MA: MIT Press,（高田聖治訳,『マクロ経済学講義』, 多賀出版, 1999 年）.

Chiang, Alpha C. (1992) *Elements of Dynamic Optimization*: McGraw-Hill, Inc.,（小田正雄・仙波憲一・高森寛・平澤典男訳,『動学的最適化の基礎』, シーエーピー出版, 2006 年）.

Cochrane, John H. (2001) “Long-Term Debt and Optimal Policy in the Fiscal Theory of the Price Level,” *Econometrica*, Vol. 69, No. 1, pp. 69−116, January.

Romer, David (1996) *Advanced Macroeconomics*: The McGraw-Hill Comapanies, Inc.,（堀雅博・岩成博夫・南條隆訳,『上級マクロ経済学』, 日本評論社, 1998 年）.

Woodford, Michael (1994) “Monetary Policy and Price-Level Determinacy in a Cash-in-Advance Economy,” *Economic Theory*, Vol. 4, No. 3, pp. 345−380.

――― (1995) “Price-Level Determinacy without Control of a Monetary Aggregate,” *Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy*, Vol. 43, No. 1, pp. 1−46.

――― (1998) *Publi Debt and the Price Level*: Princeton University.

――― (2003) *Interest and Prices: Foundations of a Theory of Monetary Policy*, Princeton: Princeton University Press.