リーマン多様体上の H^1級曲線と変分について.

廣 島　　勉

1　リーマン多様体の H^1 級曲線

(M, g) を，連結で，向き付けられ，境界を持たない，n 次元完備リーマン多様体とする．$O(M)$ をリーマン計量 g から誘導される (M, g) の主 $SO(n)$ 束，ω，θ を，それぞれ，リーマン多様体 (M, g) の Levi-Civita 接続から定まる $O(M)$ 上の接続形式と標準 1 次微分形式とする．

$T > 0$ とする．主 $SO(n)$ 束 $O(M)$ の曲線 $\hat{\gamma} : [0, T] \ni s \mapsto \hat{\gamma}(s) \in O(M)$ が H^1 級の曲線であるとは，$\hat{\gamma}$ の接ベクトル $\frac{d\hat{\gamma}}{ds}$ が $O(M)$ の標準的な接枠で L^2 級であること，すなわち，$\omega\left(\frac{d\hat{\gamma}}{ds}\right) : [0, T] \to \mathfrak{o}(n)$ と $\theta\left(\frac{d\hat{\gamma}}{ds}\right) : [0, T] \to \mathbb{R}^n$ が区間 $[0, T]$ 上で L^2 級関数であることとする．

主 $SO(n)$ 束 $O(M)$ の H^1 級曲線 $\hat{\gamma} : [0, T] \ni s \mapsto \hat{\gamma}(s) \in O(M)$ が水平であるとは，L^2 級関数として，

$$\omega\left(\frac{d\hat{\gamma}}{ds}\right) = 0$$

となることとする．

リーマン多様体 (M, g) 上の曲線 $\gamma : [0, T] \ni s \mapsto \gamma(s) \in M$ が H^1 級の曲線であるとは，主 $SO(n)$ 束 $O(M)$ の H^1 級の水平な曲線 $\hat{\gamma} : [0, T] \to O(M)$ で，γ の持ち上げになっているものが存在すること，すなわち $O(M)$ から底空間 M への射影を π とするとき，

$$\pi(\hat{\gamma}(s)) = \gamma(s)$$

となる主 $SO(n)$ 束 $O(M)$ の H^1 級の水平な曲線 $\hat{\gamma}$ が存在することとする．

このような水平持ち上げは，存在するとすれば，起点 $p_0 \in \pi^{-1}(x_0) \subset O(M)$ $(x_0 = \gamma(0) \in M)$ の選び方を除いて，一意的に定まる．

定理 1.1. $\xi \in L^2([0, T], \mathbb{R}^n)$ と起点 $p_0 \in O(M)$ が与えられたとき，

$$\begin{aligned} \omega\left(\frac{d\hat{\gamma}}{ds}\right) &= 0, \\ \theta\left(\frac{d\hat{\gamma}}{ds}\right) &= \xi, \\ \hat{\gamma}(0) &= p_0 \end{aligned} \tag{1.1}$$

となる曲線 $\hat{\gamma} : [0, T] \to O(M)$ が一意的に存在する．

証明．主 $SO(n)$ 束 $O(M)$ の局所自明化を与えるような座標近傍 (U, ϕ) を $\phi = (x, a) : U \to \mathbb{R}^n \times \mathfrak{o}(n)$ とす

る．この座標近傍内で $O(M)$ の曲線 $\hat{\gamma}$ の接ベクトルは

$$\frac{d\hat{\gamma}}{ds} = \frac{d(x \circ \hat{\gamma})}{ds} + \frac{d(a \circ \hat{\gamma})}{ds}$$

と表される．第 2 の成分は $O(M)$ の垂直成分であり，微分方程式 (1.1) は，

$$\theta\left(\frac{d\hat{\gamma}}{ds}\right) = \sum_{i=1}^{n} \theta\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) \frac{d(x^i \circ \hat{\gamma})}{ds} = \xi,$$
$$\omega\left(\frac{d\hat{\gamma}}{ds}\right) = \sum_{i=1}^{n} \omega\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) \frac{d(x^i \circ \hat{\gamma})}{ds} + \frac{d(a \circ \hat{\gamma})}{ds} = 0$$

と書き下せる．$\left(\theta(\frac{\partial}{\partial x^i})\right)_{i=1,2,\ldots,n}$ を行列とみなせば座標近傍内で正則であるので，その逆行列を $P(x,a)$ として，微分方程式 (1.1) を書き直すと．

$$\frac{d(x^i \circ \hat{\gamma})}{ds} = \sum_{j=1}^{n} P^i_j(x \circ \hat{\gamma}, a \circ \hat{\gamma})\xi^j,$$
$$\frac{d(a \circ \hat{\gamma})}{ds} = -\sum_{i=1,j=1}^{n} \omega\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) P^i_j(x \circ \hat{\gamma}, a \circ \hat{\gamma})\xi^j$$

となる．すなわち，微分方程式 (1.1) を解くことは，座標近傍 $\phi(U) \subset \mathbb{R}^n \times \mathfrak{o}(n)$ で定義された，線型写像空間に値を持つ関数 $F : \phi(U) \to \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \oplus \mathfrak{o}(n))$ を

$$F(u) = F(x,a) = P(x,a) \oplus \left(-\sum_{i=1}^{n} \omega\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) P^i(x,a)\right)$$

とするとき，$f : [0,T] \to \phi(U) \subset \mathbb{R}^n \times \mathfrak{o}(n)$ を未知関数として，微分方程式

$$f' = F(f)\xi \tag{1.2}$$

を解くことに他ならない．

関数 ξ が区間 $[0,T]$ 上 L^2 級であるとき，(1.2) の初期値問題の解 f が H^1 級として一意に存在すること，関数 f は C^0 級になることが，標準的な議論で示される． □

この定理より，起点 $x_0 \in M$ を固定するとき，接ベクトルが 2 乗可積分である曲線の空間が次の様に定義できる．

定義 1.

$$H^1([0,T],M,x_0) = \left\{\pi \circ \hat{\gamma} \;\middle|\; \hat{\gamma} : [0,T] \to O(M), \pi(\hat{\gamma}(0)) = x_0, \omega\left(\frac{d\hat{\gamma}}{ds}\right) = 0, \theta\left(\frac{d\hat{\gamma}}{ds}\right) \in L^2([0,T],\mathbb{R}^n)\right\}$$

さらに，$H^1([0,T],M,x_0)$ は連続な曲線の空間 $C^0([0,T],M,x_0)$ の部分空間となる．

前論文 [3] では，主 $SO(n)$ 束 $O(M)$ の水平な H^1 級曲線 $\hat{\gamma}$ に沿った変分に関する作用素を定義し，その作用素ノルムの評価を導いた．本論文では，その評価に新たな進展があったので報告する．

2　水平な曲線に沿った作用素 Z

主 $SO(n)$ 束 $O(M)$ の水平な H^1 級曲線 $\hat{\gamma}:[0,T]\to O(M)$ を固定する．L^2 級関数 ξ を

$$\xi=\theta\left(\frac{d\hat{\gamma}}{ds}\right)\in L^2([0,T],\mathbb{R}^n)$$

で定義する．また，底空間 (M,g) のリーマン曲率 R を，主 $SO(n)$ 束 $O(M)$ 上の $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n\otimes\mathbb{R}^n\otimes\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ 値関数とみなし，$R(s)=R(\hat{\gamma}(s))$ と略記する．

定義 2. 区間 $[0,T]$ で定義された $\mathbb{R}^n$ に値を持つ関数 f に対し，作用素 Z を，

$$Zf(s)=\int_0^s\int_0^{s_1}R(s_0)\left(\xi(s_0),f(s_0)\right)\xi(s_1)\,ds_0ds_1=\int_0^s\int_{s_1}^s R(s_1)\left(\xi(s_1),f(s_1)\right)\xi(s_0)ds_0ds_1 \tag{2.1}$$

で定義する．

Einstein の縮約記号を用いて，$(R(X,Y)Z)^{\mathrm{d}}=Z^{\mathrm{c}}X^{\mathrm{a}}R^{\mathrm{d}}_{\mathrm{abc}}Y^{\mathrm{b}}$ と表すと，

$$Zf^{\mathrm{d}}(s)=\int_0^s\int_{s_1}^s\xi^{\mathrm{c}}(s_0)\xi^{\mathrm{a}}(s_1)R^{\mathrm{d}}_{\mathrm{abc}}(s_1)f^{\mathrm{b}}(s_1)\,ds_0ds_1$$

である．さらに $\mathbb{R}^n$ 値関数 Ξ を

$$\Xi(s)-\Xi(s_1)=\int_{s_1}^s\xi(s_0)\,ds_0$$

となるものとすると，Zf は

$$Zf^{\mathrm{d}}(s)=\int_0^s\left(\Xi^{\mathrm{c}}(s)-\Xi^{\mathrm{c}}(s_1)\right)\xi^{\mathrm{a}}(s_1)R^{\mathrm{d}}_{\mathrm{abc}}(s_1)f^{\mathrm{b}}(s_1)\,ds_1$$

と書き表される．

作用素 Z の巾について考察しよう．Z^2，Z^3 については，直接の計算で，

$$\begin{aligned}Z^2f^{\mathrm{d}}(s)=&\int_0^s\int_0^{s_2}\left(\Xi^{\mathrm{c}_2}(s)-\Xi^{\mathrm{c}_2}(s_2)\right)\left(\Xi^{\mathrm{c}_1}(s_2)-\Xi^{\mathrm{c}_1}(s_1)\right)\\&\times\xi^{\mathrm{a}_2}(s_2)\xi^{\mathrm{a}_1}(s_1)R^{\mathrm{d}}_{\mathrm{a}_2\mathrm{b}_2\mathrm{c}_2}(s_2)R^{\mathrm{b}_2}_{\mathrm{a}_1\mathrm{b}_1\mathrm{c}_1}(s_1)f^{\mathrm{b}_1}(s_1)\,ds_1ds_2\\Z^3f^{\mathrm{d}}(s)=&\int_0^s\int_0^{s_3}\int_0^{s_2}\left(\Xi^{\mathrm{c}_3}(s)-\Xi^{\mathrm{c}_3}(s_3)\right)\left(\Xi^{\mathrm{c}_2}(s_3)-\Xi^{\mathrm{c}_2}(s_2)\right)\left(\Xi^{\mathrm{c}_1}(s_2)-\Xi^{\mathrm{c}_1}(s_1)\right)\\&\times\xi^{\mathrm{a}_3}(s_3)\xi^{\mathrm{a}_2}(s_2)\xi^{\mathrm{a}_1}(s_1)R^{\mathrm{d}}_{\mathrm{a}_3\mathrm{b}_3\mathrm{c}_3}(s_3)R^{\mathrm{b}_3}_{\mathrm{a}_2\mathrm{b}_2\mathrm{c}_2}(s_2)R^{\mathrm{b}_2}_{\mathrm{a}_1\mathrm{b}_1\mathrm{c}_1}(s_1)f^{\mathrm{b}_1}(s_1)\,ds_1ds_2ds_3\end{aligned}$$

となる．

$\mathbb{R}^k$ の単体

$$s\Delta_k=\{(s_1,s_2,\ldots s_k)\in\mathbb{R}^k|0\le s_1\le s_2\le\ldots s_k\le s\}$$

上の積分を

$$\int_{s\Delta_k}\cdots d\mathbf{s}=\int_0^s\int_0^{s_k}\cdots\int_0^{s_3}\int_0^{s_2}\cdots ds_1ds_2\cdots ds_{k-1}ds_k$$

と書けば，Z^k $(k \in \mathbb{N}, k > 0)$ については，

$$Z^k f^{\mathrm{d}}(s) = \int_{s\Delta_k} \left(\Xi^{\mathrm{c}_k}(s) - \Xi^{\mathrm{c}_k}(s_k)\right)\left(\Xi^{\mathrm{c}_{k-1}}(s_k) - \Xi^{\mathrm{c}_{k-1}}(s_{k-1})\right)\cdots\left(\Xi^{\mathrm{c}_2}(s_3) - \Xi^{\mathrm{c}_2}(s_2)\right)\left(\Xi^{\mathrm{c}_1}(s_2) - \Xi^{\mathrm{c}_1}(s_1)\right)$$
$$\times \xi^{\mathrm{a}_k}(s_k)\xi^{\mathrm{a}_{k-1}}(s_{k-1})\cdots\xi^{\mathrm{a}_2}(s_2)\xi^{\mathrm{a}_1}(s_1)$$
$$\times R^{\mathrm{d}}_{\mathrm{a}_k\mathrm{b}_k\mathrm{c}_k}(s_k)R^{\mathrm{b}_k}_{\mathrm{a}_{k-1}\mathrm{b}_{k-1}\mathrm{c}_{k-1}}(s_{k-1})\cdots R^{\mathrm{b}_3}_{\mathrm{a}_2\mathrm{b}_2\mathrm{c}_2}(s_2)R^{\mathrm{b}_2}_{\mathrm{a}_1\mathrm{b}_1\mathrm{c}_1}(s_1)f^{\mathrm{b}_1}(s_1)\,d\mathbf{s}$$

と書き表せる．

さて，$|Z^k f(s)|$ $(s \in [0,T])$ の評価をしよう．

$0 \le s_1 \le s_2 \le \ldots s_k \le s$ のとき，

$$\begin{aligned}
&|\Xi(s) - \Xi(s_k)|\,|\Xi(s_k) - \Xi(s_{k-1})|\cdots|\Xi(s_3) - \Xi(s_2)|\,|\Xi(s_2) - \Xi(s_1)| \\
&\le \left(\frac{|\Xi(s) - \Xi(s_k)| + |\Xi(s_k) - \Xi(s_{k-1})| + \cdots + |\Xi(s_3) - \Xi(s_2)| + |\Xi(s_2) - \Xi(s_1)|}{k}\right)^k \\
&\le \left(\frac{\int_{s_k}^{s}|\xi(s_0)|\,ds_0 + \int_{s_{k-1}}^{s_k}|\xi(s_0)|\,ds_0 + \cdots + \int_{s_2}^{s_3}|\xi(s_0)|\,ds_0 + \int_{s_1}^{s_2}|\xi(s_0)|\,ds_0}{k}\right)^k \\
&= \left(\frac{\int_0^s|\xi(s_0)|\,ds_0 - \int_0^{s_1}|\xi(s_0)|\,ds_0}{k}\right)^k \\
&= \frac{1}{k^k}\sum_{l=0}^{k}(-1)^l\binom{k}{l}\left(\int_0^s|\xi(s_0)|\,ds_0\right)^{k-l}\left(\int_0^{s_1}|\xi(s_0)|\,ds_0\right)^l
\end{aligned}$$

と，

$$\begin{aligned}
&\int_{s\Delta_k}|\xi(s_k)||\xi(s_{k-1})|\cdots|\xi(s_2)||\xi(s_1)|\left(\int_0^{s_1}|\xi(s_0)|\,ds_0\right)^l d\mathbf{s} \\
&= \int_0^s\int_0^{s_k}\cdots\int_0^{s_3}\int_0^{s_2}|\xi(s_k)||\xi(s_{k-1})|\cdots|\xi(s_2)||\xi(s_1)|\left(\int_0^{s_1}|\xi(s_0)|\,ds_0\right)^l ds_1ds_2\cdots ds_{k-1}ds_k \\
&= \int_0^s\int_0^{s_k}\cdots\int_0^{s_3}|\xi(s_k)||\xi(s_{k-1})|\cdots|\xi(s_2)|\frac{1}{l+1}\left(\int_0^{s_2}|\xi(s_0)|\,ds_0\right)^{l+1} ds_2\cdots ds_{k-1}ds_k \\
&= \int_0^s\int_0^{s_k}\cdots\int_0^{s_4}|\xi(s_k)||\xi(s_{k-1})|\cdots|\xi(s_3)|\frac{1}{(l+2)(l+1)}\left(\int_0^{s_3}|\xi(s_0)|\,ds_0\right)^{l+2} ds_3\cdots ds_{k-1}ds_k \\
&= \cdots \\
&= \int_0^s\int_0^{s_k}|\xi(s_k)||\xi(s_{k-1})|\frac{1}{(l+k-2)\cdots(l+2)(l+1)}\left(\int_0^{s_{k-1}}|\xi(s_0)|\,ds_0\right)^{l+k-2} ds_{k-1}ds_k \\
&= \int_0^s|\xi(s_k)|\frac{1}{(l+k-1)\cdots(l+2)(l+1)}\left(\int_0^{s_k}|\xi(s_0)|\,ds_0\right)^{l+k-1} ds_k \\
&= \frac{l!}{(l+k)!}\left(\int_0^s|\xi(s_0)|\,ds_0\right)^{l+k}
\end{aligned}$$

から,

$$\int_{s\Delta_k} |\Xi(s)-\Xi(s_k)|\,|\Xi(s_k)-\Xi(s_{k-1})|\cdots|\Xi(s_3)-\Xi(s_2)|\,|\Xi(s_2)-\Xi(s_1)|\,|\xi(s_k)||\xi(s_{k-1})|\cdots|\xi(s_2)||\xi(s_1)|d\mathbf{s}$$

$$\leq \frac{1}{k^k}\sum_{l=0}^{k}(-1)^l\binom{k}{l}\left(\int_0^s |\xi(s_0)|\,ds_0\right)^{k-l}\frac{l!}{(l+k)!}\left(\int_0^s |\xi(s_0)|\,ds_0\right)^{l+k}$$

$$= \frac{k!}{k^k}\left(\int_0^s |\xi(s_0)|\,ds_0\right)^{2k}\sum_{l=0}^{k}\frac{(-1)^l}{(k+l)!(k-l)!}$$

を得る．ここで，簡単な計算で，

$$\begin{aligned}\sum_{l=0}^{k}\frac{(-1)^l}{(k+l)!(k-l)!} &= \frac{1}{2(2k)!}\sum_{l=0}^{k}(-1)^l\left(\binom{2k}{k+l}+\binom{2k}{k-l}\right)\\ &= \frac{1}{2(2k)!}\left(\binom{2k}{k}+\sum_{l=-k}^{k}(-1)^l\binom{2k}{k+l}\right)\\ &= \frac{1}{2(k!)^2}\end{aligned}$$

であるから，

$$\begin{aligned}&\int_{s\Delta_k} |\Xi(s)-\Xi(s_k)|\,|\Xi(s_k)-\Xi(s_{k-1})|\cdots|\Xi(s_3)-\Xi(s_2)|\,|\Xi(s_2)-\Xi(s_1)|\,|\xi(s_k)||\xi(s_{k-1})|\cdots|\xi(s_2)||\xi(s_1)|d\mathbf{s}\\ &\qquad\leq \frac{1}{2k^k k!}\left(\int_0^s |\xi(s_0)|\,ds_0\right)^{2k} \qquad (2.2)\end{aligned}$$

を得た．

以上で $|Z^k f(s)|$ $(s\in[0,T])$ の評価の準備が整った．

命題 2.1. $\|f\|_{C^0}=\max\{|f(s)|\mid s\in[0,T]\}$，$\|R\|_{C^0}=\max\{|R(s)|\mid s\in[0,T]\}$，とするとき，

$$|Z^k f(s)| \leq \frac{\|R\|_{C^0}^k}{2k^k k!}\left(\int_0^s |\xi(s_0)|\,ds_0\right)^{2k}\|f\|_{C^0} \qquad (2.3)$$

が成立する．

系 2.2. 区間 $[0,T]$ で定義された C^0 級関数 f に対し，無限級数

$$\sum_{k=0}^{\infty} Z^k f = f + Zf + Z^2 f + \cdots$$

は C^0 位相で絶対収束する．

3　H^1 曲線の変分場ベクトル

定理 1.1 により H^1 級の曲線の空間 $H^1([0,T],M,x_0)$ は，$L^2([0,1],\mathbb{R}^n)\ni\xi\mapsto\pi\circ\hat{\gamma}$ を「座標」として持つ．$L^2([0,1],\mathbb{R}^n)$ における ξ の変分に対する，リーマン多様体 (M,g) の曲線 $\gamma=\pi\circ\hat{\gamma}$ の挙動を調べたい．

Y を水平な曲線 $\hat{\gamma}$ に沿った主 $SO(n)$ 束 $O(M)$ のベクトル場とする．Levi-Civita 接続において歪率は 0 であるので，

$$\begin{aligned} 2d\theta\left(\frac{d\hat{\gamma}}{ds}, Y\right) &= \omega(Y)\theta\left(\frac{d\hat{\gamma}}{ds}\right) = \omega(Y)\xi, \\ 2d\omega\left(\frac{d\hat{\gamma}}{ds}, Y\right) &= R\left(\theta\left(\frac{d\hat{\gamma}}{ds}\right), \theta(Y)\right) = R\left(\xi, \theta(Y)\right) \end{aligned} \tag{3.1}$$

である．

$\xi \in L^2([0,T], \mathbb{R}^n)$ が，定理 1.1 により $O(M)$ の曲線 $\hat{\gamma}$ に対応しているとする．それらの変分の間には次の関係が成立する．

命題 3.1. ξ の変分を η とするとき，$O(M)$ の曲線 $\hat{\gamma}$ の η に対応する変分 Y は，初期条件 $\theta(Y) = 0$, $\omega(Y) = 0$ の下で，微分方程式

$$\begin{aligned} \theta(Y)' &= \eta + \omega(Y)\xi, \\ \omega(Y)' &= R(\xi, \theta(Y)) \end{aligned} \tag{3.2}$$

の解である．

証明. 曲線の変分 Y に対しては，$\left[\frac{d}{ds}, Y\right] = 0$ であることに注意して，

$$2d\theta\left(\frac{d\hat{\gamma}}{ds}, Y\right) = \frac{d}{ds}\theta(Y) - Y\left(\theta\left(\frac{d\hat{\gamma}}{ds}\right)\right) = \theta(Y)' - \eta,$$

また，

$$2d\omega\left(\frac{d\hat{\gamma}}{ds}, Y\right) = \frac{d}{ds}\omega(Y) - Y\left(\omega\left(\frac{d\hat{\gamma}}{ds}\right)\right) = \omega(Y)'$$

なので，(3.1) から，命題を得る． □

$$\int_0^s \omega(Y)(s_2)\xi(s_2)\,ds_2 = \int_0^s \int_0^{s_2} R(s_1)\left(\xi(s_1), \theta(Y)(s_1)\right)\xi(s_2)\,ds_1 ds_2$$

であるので，$H(s) = \int_0^s \eta(s_0)\,ds_0$ とすると，微分方程式 (3.2) は，初期値条件も含め，§ 2 (2) の作用素 Z を用いて

$$H = (1 - Z)\theta(Y)$$

と表される．

命題 3.2. $\xi \in L^2([0,1], \mathbb{R}^n)$ の変分を $\eta \in L^2([0,1], \mathbb{R}^n)$ とするとき，$H(s) = \int_0^s \eta(s_0)\,ds_0$ とすると，次の式が成立する．

$$\theta(Y) = \sum_{k=0}^{\infty} Z^k H$$

証明. η が L^2 級ならば，H は C^0 級であり，系 2.2 から問題の級数は絶対収束し，

$$(1 - Z)\sum_{k=0}^{\infty} Z^k H = H$$

となる． □

ξ の変分 η に対し曲線 $\gamma:[0,T]\to M$ の端点 $\gamma(T)$ の挙動は，$\theta(Y)(T)$ で記述される．現在のところ，$\theta(Y)(T)$ に対しては次の評価を得たことになる．

命題 3.3. $\xi\in L^2([0,1],\mathbb{R}^n)$ の変分を $\eta\in L^2([0,1],\mathbb{R}^n)$ とするとき，$H(s)=\int_0^s \eta(s_0)\,ds_0$ とすると，次の式が成立する．

$$|\theta(Y)(T)|\leq\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\|R\|_{C^0}^k}{2k^k k!}\left(\int_0^T|\xi(s_0)|\,ds_0\right)^{2k}\|H\|_{C^0}$$

ここで，$\|H\|_{C^0}=\max\{|H(s)|\mid s\in[0,T]\}$，$\|R\|_{C^0}=\max\{|R(s)|\mid s\in[0,T]\}$ である．

残念ながら，この評価では経路積分の評価を導くには十分ではない．さらなる発展が望まれる．

参考文献

[1] 藤原　大輔, ファインマン経路積分の数学的方法, シュプリンガー・フェアラーク東京, (1999)

[2] T. Hiroshima, *A Thought about Feynman Path Integral on Riemannian Manifold*, NUCB Journal of Economics and Information Science Vol. **55** No. **2**, (2011) 219-225.

[3] T. Hiroshima, *Path Space and Laplace-Beltrami Operator on Riemannian Manifold*, NUCB Journal of Economics and Information Science Vol. **56** No. **2**, (2012) 131-138.