H^1曲線上の変分オペレーターについて.

The Operator of Variation on H^1-Class Curves

廣　島　　　勉

1　リーマン多様体の H^1 級曲線

(M, g) を，連結で，向き付けられ，境界を持たない，n 次元完備リーマン多様体とする．リーマン計量 g から誘導される (M, g) の主 $SO(n)$ 束を $O(M)$ とし，$O(M)$ 上の標準 1 次微分形式を θ，リーマン多様体 (M, g) の Levi-Civita 接続から定まる $O(M)$ 上の接続形式を ω とする．

$T > 0$ とする．主 $SO(n)$ 束 $O(M)$ の曲線 $\hat{\gamma} : [0, T] \ni s \mapsto \hat{\gamma}(s) \in O(M)$ が H^1 級の曲線であるとは，$\hat{\gamma}$ の接ベクトル $\frac{d\hat{\gamma}}{ds}$ が $O(M)$ の標準的な接枠で L^2 級であること，すなわち，

$$\omega\left(\frac{d\hat{\gamma}}{ds}\right) : [0, T] \to \mathfrak{o}(n)$$

と

$$\theta\left(\frac{d\hat{\gamma}}{ds}\right) : [0, T] \to \mathbb{R}^n$$

が区間 $[0, T]$ 上で L^2 級関数であることとする．

主 $SO(n)$ 束 $O(M)$ の H^1 級曲線 $\hat{\gamma} : [0, T] \ni s \mapsto \hat{\gamma}(s) \in O(M)$ が水平であるとは，L^2 級関数として，

$$\omega\left(\frac{d\hat{\gamma}}{ds}\right) = 0$$

となることとする．

リーマン多様体 (M, g) 上の曲線 $\gamma : [0, T] \ni s \mapsto \gamma(s) \in M$ が H^1 級の曲線であるとは，主 $SO(n)$ 束 $O(M)$ の H^1 級の水平な曲線 $\hat{\gamma} : [0, T] \to O(M)$ で，γ の持ち上げになっているものが存在すること，すなわち $O(M)$ から底空間 M への射影を π とするとき，

$$\pi(\hat{\gamma}(s)) = \gamma(s)$$

となる主 $SO(n)$ 束 $O(M)$ の H^1 級の水平な曲線 $\hat{\gamma}$ が存在することとする．

このような水平持ち上げは，存在するとすれば，起点 $p_0 \in \pi^{-1}(x_0) \subset O(M)$ $(x_0 = \gamma(0) \in M)$ の選び方を除いて，一意的に定まる．

定理 1.1. $\xi \in L^2([0,T],\mathbb{R}^n)$ と起点 $p_0 \in O(M)$ が与えられたとき,

$$\begin{aligned} \omega\left(\frac{d\hat{\gamma}}{ds}\right) &= 0, \\ \theta\left(\frac{d\hat{\gamma}}{ds}\right) &= \xi, \\ \hat{\gamma}(0) &= p_0 \end{aligned} \tag{1.1}$$

となる曲線 $\hat{\gamma} : [0,T] \to O(M)$ が一意的に存在する.

証明. 主 $SO(n)$ 束 $O(M)$ の局所自明化を与えるような座標近傍 (U,ϕ) を $\phi = (x,a) : U \to \mathbb{R}^n \times \mathfrak{o}(n)$ とする. この座標近傍内で $O(M)$ の曲線 $\hat{\gamma}$ の接ベクトルは

$$\frac{d\hat{\gamma}}{ds} = \frac{d(x \circ \hat{\gamma})}{ds} + \frac{d(a \circ \hat{\gamma})}{ds}$$

と表される. 第 2 の成分は $O(M)$ の垂直成分であり, 微分方程式 (1.1) は,

$$\begin{aligned} \theta_i\left(\frac{d\hat{\gamma}}{ds}\right) &= \sum_{1 \le j \le n} \theta_i\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) \frac{d(x_j \circ \hat{\gamma})}{ds} = \xi, \\ \omega_{ij}\left(\frac{d\hat{\gamma}}{ds}\right) &= \sum_{1 \le k \le n} \omega_{ij}\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right) \frac{d(x_k \circ \hat{\gamma})}{ds} + \frac{d(a_{ij} \circ \hat{\gamma})}{ds} = 0 \end{aligned}$$

と書き下せる. 行列 $\left(\theta_i(\frac{\partial}{\partial x_j})\right)_{1 \le i,j \le n}$ は座標近傍内で正則であるので, その逆行列を $(P_{ij}(x,a))_{1 \le i,j \le n}$ として, 微分方程式 (1.1) を書き直すと,

$$\begin{aligned} \frac{d(x_i \circ \hat{\gamma})}{ds} &= \sum_{1 \le j \le n} P_{ij}(x \circ \hat{\gamma}, a \circ \hat{\gamma})\xi_j, \\ \frac{d(a_{ij} \circ \hat{\gamma})}{ds} &= -\sum_{1 \le k,l \le n} \omega_{ij}\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right) P_{kl}(x \circ \hat{\gamma}, a \circ \hat{\gamma})\xi_l \end{aligned}$$

となる. すなわち, 微分方程式 (1.1) を解くことは, 関数 $f = (x,a) : [0,T] \to \phi(U) \subset \mathbb{R}^n \times \mathfrak{o}(n)$ を未知関数として, 微分方程式

$$\begin{aligned} x_i' &= \sum_{1 \le j \le n} P_{ij}(x,a)\xi_j, \\ a_{ij}' &= \sum_{1 \le k,l \le n} \omega_{ij}\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right) P_{kl}(x,a)\xi_l \end{aligned} \tag{1.2}$$

$(x : [0,T] \to \mathbb{R}^n$, $a : [0,T] \to \mathfrak{o}(n))$ を解くことに他ならない.

関数 ξ が区間 $[0,T]$ 上 L^2 級であるとき, (1.2) の初期値問題の解 $f = (x,a)$ が H^1 級として一意に存在すること, 関数 $f = (x,a)$ は C^0 級になることが, 標準的な議論で示される. □

この定理より, 起点 $x_0 \in M$ を固定するとき, 接ベクトルが 2 乗可積分である曲線の空間が次の様に定義できる.

定義 1.

$$H^1([0,T],M,x_0) = \left\{ \pi \circ \hat{\gamma} \;\middle|\; \hat{\gamma} : [0,T] \to O(M), \pi(\hat{\gamma}(0)) = x_0, \omega\left(\frac{d\hat{\gamma}}{ds}\right) = 0, \theta\left(\frac{d\hat{\gamma}}{ds}\right) \in L^2([0,T],\mathbb{R}^n) \right\}$$

さらに, $H^1([0,T],M,x_0)$ は連続な曲線の空間 $C^0([0,T],M,x_0)$ の部分空間となる.

2　H^1 曲線の変分場ベクトル

主 $SO(n)$ 束 $O(M)$ の水平な H^1 級曲線 $\hat{\gamma}:[0,T]\to O(M)$ に対し，L^2 級関数 ξ を

$$\xi=\theta\left(\frac{d\hat{\gamma}}{ds}\right)\in L^2([0,T],\mathbb{R}^n)$$

で定義する．定理 1.1 により H^1 級の曲線の空間 $H^1([0,T],M,x_0)$ は，$L^2([0,1],\mathbb{R}^n)\ni\xi\mapsto\pi\circ\hat{\gamma}$ を「座標」として持つ．$L^2([0,1],\mathbb{R}^n)$ における ξ の変分に対する，リーマン多様体 (M,g) の曲線 $\gamma=\pi\circ\hat{\gamma}$ の挙動を調べたい．

底空間 (M,g) のリーマン曲率テンソル $R=R_{ijkl}$ を，主 $SO(n)$ 束 $O(M)$ 上の $\mathbb{R}^n\oplus\mathbb{R}^n\oplus\mathbb{R}^n\oplus\mathbb{R}^n$ 値関数とみなし，$R_{ijkl}(s)=R_{ijkl}(\hat{\gamma}(s))$ と略記する．

Y を水平な曲線 $\hat{\gamma}$ に沿った主 $SO(n)$ 束 $O(M)$ のベクトル場とする．Levi-Civita 接続において歪率は 0 であるので，

$$\begin{aligned}2d\theta_i\left(\frac{d\hat{\gamma}}{ds},Y\right)&=\sum_{1\le j\le n}\omega_{ij}(Y)\theta_j\left(\frac{d\hat{\gamma}}{ds}\right)=\sum_{1\le j\le n}\omega_{ij}(Y)\xi_j,\\ 2d\omega_{ij}\left(\frac{d\hat{\gamma}}{ds},Y\right)&=\sum_{1\le k,l\le n}R_{ijkl}\theta_k\left(\frac{d\hat{\gamma}}{ds}\right)\theta_l(Y)=\sum_{1\le k,l\le n}R_{ijkl}\xi_k\theta_l(Y)\end{aligned}\tag{2.1}$$

である．

$\xi\in L^2([0,T],\mathbb{R}^n)$ と $O(M)$ の曲線 $\hat{\gamma}$ の変分の間には次の関係が成立する．

命題 2.1. ξ の変分を η とするとき，$O(M)$ の曲線 $\hat{\gamma}$ の η に対応する変分 Y は，初期条件 $\theta(Y)=0$, $\omega(Y)=0$ の下で，微分方程式

$$\begin{aligned}\theta_i(Y)'&=\eta_i+\sum_{1\le j\le n}\omega_{ij}(Y)\xi_j,\\ \omega_{ij}(Y)'&=\sum_{1\le k,l\le n}R_{ijkl}\xi_k\theta_l(Y)\end{aligned}\tag{2.2}$$

の解である．

証明. 曲線の変分 Y に対しては，$\left[\frac{d}{ds},Y\right]=0$ であることに注意して，

$$\begin{aligned}2d\theta\left(\frac{d\hat{\gamma}}{ds},Y\right)&=\frac{d}{ds}\theta(Y)-Y\left(\theta\left(\frac{d\hat{\gamma}}{ds}\right)\right)=\theta(Y)'-\eta,\\ 2d\omega\left(\frac{d\hat{\gamma}}{ds},Y\right)&=\frac{d}{ds}\omega(Y)-Y\left(\omega\left(\frac{d\hat{\gamma}}{ds}\right)\right)=\omega(Y)'\end{aligned}$$

なので，(2.1) から，命題を得る． □

(2.2) から，$t\in[0,T]$ に対し，

$$\int_0^t\eta_i(s)\,ds=\theta_i(Y)(t)-\sum_{1\le j,k,l\le n}\int_0^t\xi_j(t_2)\int_0^{t_2}R_{ijkl}(t_1)\xi_k(t_1)\theta_l(Y)(t_1)\,dt_1dt_2\tag{2.3}$$

となる．

定義 2. 区間 $[0, T]$ で定義された $\mathbb{R}^n$ に値を持つ関数 f に対し，作用素 Z を，

$$Zf_i(t) = \sum_{1 \le j,k,l \le n} \int_0^t \xi_j(t_2) \int_0^{t_2} R_{ijkl}(t_1) \xi_k(t_1) f_l(t_1)\, dt_1 dt_2$$

で定義する．

(2.3) を作用素 Z を用いて書き直すと，

$$\int_0^t \eta(s)\, ds = \theta(Y)(t) - Z(\theta(Y))(t) = (1 - Z)(\theta(Y))(t) \tag{2.4}$$

$|\cdot|$ をユークリッド空間の標準的なノルムとする．

$$\int_0^t |\xi(t_2)| \int_0^{t_2} |\xi(t_1)|\, dt_1 dt_2 = \frac{1}{2} \left(\int_0^t |\xi(t_1)|\, dt_1 \right)^2$$

であるので，次の評価を得る．

命題 2.2. 区間 $[0, T]$ 上のベクトル値関数 f，R と，$t \in [0, T]$ に対し，

$$F(t) = \max \{|f(s)| \mid s \in [0, t]\},$$
$$K(t) = \max \{|R(s)| \mid s \in [0, t]\}$$

とするとき，不等式

$$|Zf(t)| \le \frac{K(t)}{2} \left(\int_0^t |\xi(t_1)|\, dt_1 \right)^2 \cdot F(t)$$

が成立する．

作用素 Z の巾 Z^m について考察しよう．

命題 2.3. $m \in \mathbb{N}$ とする．$t \in [0, T]$ において，不等式

$$|Z^m f(t)| \le \frac{K(t)^m}{(2m)!} \left(\int_0^t |\xi(t_0)|\, dt_0 \right)^{2m} \cdot F(t) \tag{2.5}$$

が成立する．

証明．(2.5) が成立しているとして，

$$\begin{aligned}
|Z^{m+1} f(t)| &\le K(t) \int_0^t |\xi(t_2)| \int_0^{t_2} |\xi(t_1)||Z^m f(t_1)|\, dt_1 dt_2 \\
&\le \frac{K(t)^{m+1}}{(2m)!} \int_0^t |\xi(t_2)| \int_0^{t_2} |\xi(t_1)| \left(\int_0^{t_1} |\xi(t_0)|\, dt_0 \right)^{2m} dt_1 dt_2 \cdot F(t) \\
&= \frac{K(t)^{m+1}}{(2m+1)!} \int_0^t |\xi(t_2)| \left(\int_0^{t_2} |\xi(t_0)|\, dt_0 \right)^{2m+1} dt_2 \cdot F(t) \\
&= \frac{K(t)^{m+1}}{(2m+2)!} \left(\int_0^{t_1} |\xi(t_0)|\, dt_0 \right)^{2m+2} \cdot F(t)
\end{aligned}$$

から，帰納法により命題 2.3 が示される． □

系 2.4. 区間 $[0,T]$ で定義された C^0 級関数 f に対し，無限級数 $\sum_{m=0}^{\infty} \|Z^m f\|_{C^0}$ は収束する．作用素の級数

$$\sum_{m=0}^{\infty} Z^m$$

は C^0 強位相で絶対収束し，

$$(1-Z)^{-1} = \sum_{m=0}^{\infty} Z^m = 1 + Z + Z^2 + \cdots$$

が成立する．

系 2.4 と (2.4) から次の命題を得る．

命題 2.5. 区間 $[0,T]$ 上の $\mathbb{R}^n$ 値関数 H を $H(t) = \int_0^t \eta(s)\,ds$ とするとき，

$$\theta(Y)(t) = ((1-Z)^{-1}H)(t)$$

であり，

$$|\theta(Y)(t)| \le \cosh\left(\sqrt{K(t)}\int_0^t |\xi(t_0)|\,dt_0\right)\cdot\int_0^t |\eta(s)|\,ds$$

の評価が成立する．

証明. $\max\{|H(s)| \mid s \in [0,t]\} \le \int_0^t |\eta(s)|\,ds$ と，

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{K(t)^m}{(2m)!}\left(\int_0^t |\xi(t_0)|\,dt_0\right)^{2m} = \cosh\left(\sqrt{K(t)}\int_0^t |\xi(t_0)|\,dt_0\right)$$

から命題 2.5 は従う． □

3　3 次元リーマン多様体の場合

リーマン多様体 (M,g) が 3 次元の場合を考察する．

接続形式 ω_{ij} は i，j について歪対称のため，命題 2.2 の第 1 式は

$$\begin{aligned}
\theta_1(Y)' &= \eta_1 + \omega_{12}(Y)\xi_2 - \omega_{31}(Y)\xi_3 \\
\theta_2(Y)' &= \eta_2 + \omega_{23}(Y)\xi_3 - \omega_{12}(Y)\xi_1 \\
\theta_3(Y)' &= \eta_3 + \omega_{31}(Y)\xi_1 - \omega_{23}(Y)\xi_2
\end{aligned}$$

となり，

$$\begin{pmatrix} \theta_1(Y)' \\ \theta_2(Y)' \\ \theta_3(Y)' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\xi_3 & \xi_2 \\ \xi_3 & 0 & -\xi_1 \\ -\xi_2 & \xi_1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \omega_{23}(Y) \\ \omega_{31}(Y) \\ \omega_{12}(Y) \end{pmatrix}$$

となる．

リーマン曲率テンソル R_{ijkl} は i，j と k，l について歪対称のため，命題 2.2 の第 2 式は

$$\begin{aligned}
\omega_{23}(Y)' &= R_{2323}(\xi_2\theta_3(Y) - \xi_3\theta_2(Y)) + R_{2331}(\xi_3\theta_1(Y) - \xi_1\theta_3(Y)) + R_{2312}(\xi_1\theta_2(Y) - \xi_2\theta_1(Y)) \\
\omega_{31}(Y)' &= R_{3123}(\xi_2\theta_3(Y) - \xi_3\theta_2(Y)) + R_{3131}(\xi_3\theta_1(Y) - \xi_1\theta_3(Y)) + R_{3112}(\xi_1\theta_2(Y) - \xi_2\theta_1(Y)) \\
\omega_{12}(Y)' &= R_{1223}(\xi_2\theta_3(Y) - \xi_3\theta_2(Y)) + R_{1231}(\xi_3\theta_1(Y) - \xi_1\theta_3(Y)) + R_{1212}(\xi_1\theta_2(Y) - \xi_2\theta_1(Y))
\end{aligned}$$

となり，

$$\begin{pmatrix} \omega_{23}(Y)' \\ \omega_{31}(Y)' \\ \omega_{12}(Y)' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{2323} & R_{2331} & R_{2312} \\ R_{3123} & R_{3131} & R_{3112} \\ R_{1223} & R_{1231} & R_{1212} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_2\theta_3(Y) - \xi_3\theta_2(Y) \\ \xi_3\theta_1(Y) - \xi_1\theta_3(Y) \\ \xi_1\theta_2(Y) - \xi_2\theta_1(Y) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} R_{2323} & R_{2331} & R_{2312} \\ R_{3123} & R_{3131} & R_{3112} \\ R_{1223} & R_{1231} & R_{1212} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\xi_3 & \xi_2 \\ \xi_3 & 0 & -\xi_1 \\ -\xi_2 & \xi_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1(Y) \\ \theta_2(Y) \\ \theta_3(Y) \end{pmatrix}$$

となる．

したがって，

$$\theta(Y) = \begin{pmatrix} \theta_1(Y) \\ \theta_2(Y) \\ \theta_3(Y) \end{pmatrix}, \quad \eta = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix}, \quad \xi = \begin{pmatrix} 0 & -\xi_3 & \xi_2 \\ \xi_3 & 0 & -\xi_1 \\ -\xi_2 & \xi_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} R_{2323} & R_{2331} & R_{2312} \\ R_{3123} & R_{3131} & R_{3112} \\ R_{1223} & R_{1231} & R_{1212} \end{pmatrix}$$

とするとき，(2.3) は

$$\int_0^t \eta(s)\,ds = \theta(Y)(t) - \int_0^t \xi(t_2) \int_0^{t_2} R(t_1)\xi(t_1)\theta(Y)(t_1)dt_1dt_2$$

となり，$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$ とするとき，Zf は

$$Zf(t) = \int_0^t \xi(t_2) \int_0^{t_2} R(t_1)\xi(t_1)f(t_1)dt_1dt_2$$

で与えられる．

参考文献

[1] 藤原　大輔, ファインマン経路積分の数学的方法, シュプリンガー・フェアラーク東京, (1999)

[2] T. Hiroshima, *A Thought about Feynman Path Integral on Riemannian Manifold*, NUCB Journal of Economics and Information Science Vol. **55** No. **2**, (2011) 219-225.

[3] T. Hiroshima, *Path Space and Laplace-Beltrami Operator on Riemannian Manifold*, NUCB Journal of Economics and Information Science Vol. **56** No. **2**, (2012) 131-138.