新古典派成長モデルの枠組での FTPL

鑓 田 亨

1 はじめに

鑓田 (2012) は、(渡辺・岩村, 2004, 第 2 章) の離散時間における FTPL (Financial Theory of Price Level) モデルを連続時間モデルとしてとらえ直した。そこで論じられたモデルには以下のような問題点があると考えられる。まず、生産は一定であると仮定されているため、政府が支出を決めると自動的に家計の消費支出は定まる。したがって家計が最適化行動する余地はない。にもかかわらず、家計の最適化行動を想定した Euler 方程式が用いられている。また、実質利子率は資本の限界生産物と考えられる。資本が存在しない経済で、実質利子率にどのような意味があるのか曖昧である。

そこで本稿では資本と Harrod 中立的な技術進歩、人口変化を明示的に取り入れたモデルを考えることにする。2 節では家計および政府の動学的予算制約式を導出する。3 節では動学的予算制約式と NPG 条件から、通時的予算制約式を導出する。4 節では家計の最適化行動から実質利子率を導出する。5 節では通時的予算制約式から FTPL の基本式を導出する。6 節は結論である。

2 家計および政府の動学的予算制約

一種類だけの財が生産されている経済を考える。資本 K_t と効率労働 A_tL_t をインプットとする一次同次の生産関数を仮定する。

$$Y_t = F(K_t, A_tL_t).$$

Y_t は減価償却を除いた純生産物である。労働の効率性および人口の変化率はそれぞれ a, n として外生的に決まっていると仮定する。

$$\dot{A}_t/A_t = a, \qquad \dot{N}_t/N_t = n.$$

ただし上付きのドットは時間 t による微分を表す。

生産された財は、消費 C_t, 政府支出 G_t, 投資 $\dot{K}_t$ として用いられる。

$$Y_t = C_t + G_t + \dot{K}_t.$$

また分配面では、財は賃金と利子所得に分けられる。

$$Y_t = w_tA_tL_t + r_tK_t.$$

ただし実質賃金 w_t は効率労働の、実質利子率 r_t は資本の限界生産物に等しい。

効率労働 1 単位当たりの純生産物を y_t, 資本を k_t, 消費を c_t, 政府支出を g_t で表すことにする。また効率労働 1 単位当たりの生産関数を f を以下のように定義する。

$$f(k_t) \equiv Y_t/A_tL_t = F(K_t/A_tL_t, 1).$$

f については、$f' > 0, f'' < 0, f(0) = 0, f'(0) = \infty, f'(\infty) = 0$ を仮定する。

効率労働 1 単位当たりで表すと、分配面および支出はそれぞれ

$$\begin{aligned} y_t = f(k_t) &= w_t + r_t k_t \\ &= c_t + g_t + \dot{k}_t + (a+n)k_t. \end{aligned} \tag{1}$$

となる。

(1) 式の両辺に物価 P_t をかけて、名目表示にする。

$$\begin{aligned} P_t y_t &= P_t w_t + r_t P_t k_t \\ &= P_t c_t + P_t g_t + P_t \dot{k}_t + (a+n) P_t k_t. \end{aligned}$$

この経済を効率労働と効率労働 1 単位当たりの政府[*1]とに分ける。

効率労働 1 単位が保有する国債を B_t, 貨幣を M_t で表す。国債 B_t を保有することにより効率労働に対して、政府は利子 $i_t B_t$ を支払わなければならない。ただし i_t は名目利子率であり、実質利子率と物価変化率の和である。貨幣 M_t 保有に対して利子は支払われない。家計にとって資本と国債は同じ名目利子を生むため無差別である。貨幣の保有は利子の得る機会の損失を意味するが、それは貨幣を保有することの便益に等しいと仮定しよう。

政府の収入は、課税・国債発行・貨幣発行とに分けられる。効率労働 1 単位当たりの名目の課税額を T_t とする。効率労働 1 単位当たりの政府支出と国債利払いの合計 $g_t + i_t M_t$ は、収入に等しくなければならない。支出が課税額よりも多ければ、政府は国債発行あるいは貨幣発行によって資金を調達しなければならない。逆に課税額が支出よりも多ければ、$\dot{B}_t + (a+n)B_t$ あるいは $\dot{M}_t + (a+n)M_t$ は負となる。

このとき、それぞれの収入と支出は表 1 のようになる。

表 1 効率労働および効率労働当たり政府の名目収入と名目支出 (1)

効率労働		効率労働当たり政府	
収入	支出	収入	支出
$P_t w_t$	$P_t c_t$	T_t	$P_t g_t$
$P_t r_t k_t$	$P_t \dot{k}_t + (a+n)P_t k_t$	$\dot{B}_t + (a+n)B_t$	$i_t B_t$
$i_t B_t$	$\dot{B}_t + (a+n)B_t$	$\dot{M}_t + (a+n)M_t$	
	$\dot{M}_t + (a+n)M_t$		
	T_t		

ここで政府の負債を $B_t^g \equiv B_t + M_t$ と定義しよう。また、効率労働 1 単位が保有する資産の名目価値 W_t を以下のように定義する。

$$W_t \equiv P_t k_t + B_t + M_t.$$

[*1] ここでいう政府は中央銀行を統合したものである。したがって名目の国債残高 B_t は、中央銀行保有分を除いたものであり、貨幣 M_t はマネタリーベースである。

W_t を時間 t で微分すると

$$\dot{W}_t = \dot{P}_t k_t + P_t \dot{k}_t + \dot{B}_t + \dot{M}_t, \tag{2}$$

となる。(2) 式の右辺第一項について、$\dot{P}_t k_t = (\dot{P}_t/P_t)P_t k_t$ である。一方、

$$P_t r_t k_t + (\dot{P}_t/P_t)P_t k_t = (r_t + \dot{P}_t/P_t)P_t k_t = i_t P_t k_t,$$

である。さらに $i_t P_t k_t + i_t B_t = i_t W_t - i_t M_t$ である。

B_t^g, W_t を用いると表 1 は形式的に以下のように書き直すことができる。

表 2　効率労働および効率労働当たり政府の名目収入と名目支出 (2)

効率労働		効率労働当たり政府	
収入	支出	収入	支出
$P_t w_t$	$P_t c_t$	T_t	$P_t g_t$
$i_t W_t - i_t M_t$	$\dot{W}_t + (a+n)W_t$	$\dot{B}_t^g + (a+n)B_t^g$	$i_t B_t^g - i_t M_t$
	T_t		

したがって家計の動学的予算制約は以下のように書くことができる。

$$P_t w_t + i_t W_t - i_t M_t = P_t c_t + \dot{W}_t + (a+n)W_t + T_t. \tag{3}$$

一方、政府の動学的予算制約は

$$T_t + \dot{B}_t^g + (a+n)B_t^g = P_t g_t + i_t B_t^g - i_t M_t, \tag{4}$$

となる[*2]。

3　NPG 条件と通時的予算制約

家計および政府の NPG 条件が成り立つと仮定する。

$$\lim_{t\to\infty} W_t \exp\left\{-\int_0^t [i_\tau - (a+n)]d\tau\right\} = 0. \tag{5}$$

$$\lim_{t\to\infty} B_t^g \exp\left\{-\int_0^t [i_\tau - (a+n)]d\tau\right\} = 0. \tag{6}$$

[*2] それぞれ W_t, B_t の微分方程式として整理しておこう。

$$\dot{W}_t = [i_t - (a+n)]W_t + (P_t w_t - P_t c_t - T_t - i_t M_t).$$

$$\dot{B}_t^g = [i_t - (a+n)]B_t^g + (P_t g_t - T_t - i_t M_t).$$

家計および政府の動学的予算制約 (3), (4) 式を微分方程式として解くと次式を得る。

$$\begin{aligned}W_t =&W_0 \exp\left\{\int_0^t [i_\tau-(a+n)]d\tau\right\}\\&+\int_0^t \exp\left\{\int_s^t [i_\tau-(a+n)]d\tau\right\}(P_s w_s-P_s c_s-T_s-i_s M_s)ds.\\B_t^g =&B_0^g \exp\left\{\int_0^t [i_\tau-(a+n)]d\tau\right\}\\&+\int_0^t \exp\left\{\int_s^t [i_\tau-(a+n)]d\tau\right\}(P_s g_s-T_s-i_t M_t)ds.\end{aligned}$$

両辺に $\exp\left\{-\int_0^t [i_\tau-(a+n)]d\tau\right\}$ をかけて現在価値に直す。NPG 条件 (5), (6) 式が成り立つと仮定すると

$$W_0+\lim_{t\to\infty}\int_0^t \exp\left\{-\int_0^s [i_\tau-(a+n)]d\tau\right\}(P_s w_s-P_s c_s-T_t-i_s M_s)ds=0. \tag{7}$$

$$B_0^g+\lim_{t\to\infty}\int_0^t \exp\left\{-\int_0^s [i_\tau-(a+n)]d\tau\right\}(P_s g_s-T_s-i_s M_s)ds=0. \tag{8}$$

を得る。この 2 式が家計および政府の通時的 (intertemporal) 予算制約である。(7) 式は、現在における富と現在から無限の将来にわたる賃金の割引現在価値の合計が、現在から無限の将来にわたる消費、課税額、シニョレッジの割引現在価値の合計に等しいことを意味する。一方 (8) 式は、現在から無限の将来にわたる課税額、シニョレッジの割引現在価値の合計は、現在における政府の負債と現在から無限の将来にわたる政府支出の割引現在価値の合計に等しいことを意味する。あるいは現在から無限の将来にわたる名目の財政余剰 $T_s+i_s M_s-P_s g_s$ の割引現在価値は、現在における政府の負債と等しいとも解釈できる。

4　家計の最適化問題と実質利子率

家計（効率労働）の最適化問題は (3) 式の制約の下、$\int_0^\infty u(c_t)\exp(-\rho t)dt$ を最大にするように c_t を決めることである。ただし ρ は主観的割引率であり、一定であると仮定する。

現在価値ハミルトン関数を以下のように定義する。

$$H_t=u(c_t)\exp(-\rho t)+\mu_t\{[i_t-(a+n)]W_t+(P_t w_t-P_t c_t-T_t-i_t M_t)\}.$$

最大化のための条件は、$\partial H_t/\partial c_t=0$, $\partial H_t/\partial \mu_t=\dot{W}_t$, $\dot{\mu}_t=-\partial H_t/\partial W_t$, $\lim_{t\to\infty}\mu_t W_t=0$ である。経常値共役状態変数を $\lambda_t\equiv\mu_t\exp(\rho t)$ と定義する。

$$\begin{aligned}\frac{\partial H_t}{\partial c_t}&=u'(c_t)\exp(-\rho t)-\mu_t P_t\\&=[u'(c_t)-\lambda_t P_t]\exp(-\rho t)\\&=0.\end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}\dot{\mu}_t&=-\frac{\partial H_t}{\partial W_t}\\&=-\mu_t[i_t-(a+n)]\\&=-\exp(-\rho t)\lambda_t[i_t-(a+n)].\end{aligned} \tag{10}$$

$\exp(-\rho t) > 0$ なので (9) 式より、

$$u'(c_t) - \lambda_t P_t = 0. \tag{11}$$

また (10) 式より次式を得る[*3 *4]。

$$\dot{\lambda}_t = -\lambda_t[i_t - (a+n+\rho)]. \tag{12}$$

家計の最適化行動を仮定すると、(11), (12) 式が成り立たねばならない。
(11) 式の $\lambda_t = u'(c_t)/P_t$ を t で微分すると

$$\dot{\lambda}_t = [u''(c_t)\dot{c}_t P_t - u'(c_t)\dot{P}_t]/P_t^2, \tag{13}$$

を得る。(11), (12), (13) 式より

$$[u''(c_t)\dot{c}_t P_t - u'(c_t)\dot{P}_t]/P_t^2 = -[i_t - (a+n+\rho)]u'(c_t)/P_t,$$

である。したがって

$$i_t = -\frac{u''(c_t)c_t}{u'(c_t)}\frac{\dot{c}_t}{c_t} + (a+n+\rho) + \dot{P}_t/P_t.$$

異時点間の代替の弾力性 $\sigma_t = -u'(c_t)/u''(c_t)c_t$ を用いて上式を書き直すと

$$i_t = \sigma_t^{-1}\dot{c}_t/c_t + a + n + \rho + \dot{P}_t/P_t,$$

となる。したがって実質利子率 r_t は

$$r_t = \sigma_t^{-1}\dot{c}_t/c_t + a + n + \rho, \tag{14}$$

となる。異時点間の代替の弾力性はほぼ 1 前後になる (Blanchard and Fischer, 1989, p.44)。したがって実質利子率は効率労働当たりの消費の変化率、技術進歩率、人口変化率、主観的割引率から構成されることになる。

実質利子率は資本の限界生産物であった。効率労働当たりの消費が 0 となる定常状態では

$$f'(k_t) = a + n + \rho, \tag{15}$$

となる。定常状態における効率労働当たりの資本ストックは、(15) 式を満たす k_t である。これを k^* としよう。現在の資本ストックが k^* より少ない場合、経済が鞍点経路上にあるためには、c_t は定常状態よりも小さくなければならない。したがって $\dot{c}_t/c_t$ は正となる。逆に現在の資本ストックが k^* より多い場合には、c_t は定常状態よりも大きくなければならない。したがって $\dot{c}_t/c_t$ は負となる。

[*3] λ_t の定義より $\dot{\mu}_t = \dot{\lambda}_t \exp(-\rho t) - \rho\lambda_t \exp(-\rho t)$. これを (10) 式の左辺に代入する。

[*4] $\dot{\mu} = -\mu_t[i_t - (a+n)]$ より、$\mu_t = \mu_0 \exp\left\{-\int_0^t [i_\tau - (a+n)d\tau]\right\}$. したがって NPG 条件 (5) 式が成り立てば、横断面条件 $\lim_{t\to\infty}\mu_t W_t = 0$ は成り立つ。なぜならば

$$\lim_{t\to\infty}\mu_t W_t = \lim_{t\to\infty}\mu_0 W_t \exp\left\{-\int_0^t [i_\tau - (a+n)d\tau]\right\} = \mu_0 \lim_{t\to\infty} W_t \exp\left\{-\int_0^t [i_\tau - (a+n)d\tau]\right\}.$$

5　現在の物価の決定

5.1　政府の通時的予算制約からの導出

政府の通時的予算制約 (8) 式より

$$B_0^g = \int_0^t \exp\left\{-\int_0^s [i_\tau - (a+n)]d\tau\right\}(T_s + i_s M_s - P_s g_s)ds,$$

である。ここで

$$\begin{aligned}\exp\left\{-\int_0^s [i_\tau - (a+n)]d\tau\right\} &= \exp\left\{-\int_0^s [r_\tau - (a+n) + \dot{P}_\tau/P_\tau]d\tau\right\}\\ &= \exp\left\{-\int_0^s [r_\tau - (a+n)]d\tau - \int_0^s \frac{1}{P_\tau}dP_\tau\right\}\\ &= \exp\left\{-\int_0^s [r_\tau - (a+n)]d\tau - (\ln P_s - \ln P_0)\right\}\\ &= \exp\left\{-\int_0^s [r_\tau - (a+n)]d\tau\right\}P_0/P_s,\end{aligned} \tag{16}$$

である。したがって

$$\frac{B_0^g}{P_0} = \int_0^\infty \exp\left\{-\int_0^s [r_\tau - (a+n)]d\tau\right\}(T_s/P_s + i_s M_s/P_s - g_s)ds, \tag{17}$$

を得る。これは、実質財政余剰 $T_s/P_s + i_s M_s/P_s - g_s$ の割引現在価値の合計が政府の負債の実質残高に等しくなるという、通常の FTPL の基本式である。負債の名目の残高は一定なので、何らかの原因で右辺が小さくなれば、物価は (17) 式を満たすために上昇しなければならない。

5.2　家計の通時的予算制約からの導出

家計の通時的予算制約 (7) 式より

$$W_0 = \int_0^\infty \exp\left\{-\int_0^s [i_\tau - (a+n)]d\tau\right\}(P_s c_s + T_s + i_s M_s - P_s w_s)ds,$$

である。したがって (16) 式より

$$\frac{W_0}{P_0} = \int_0^\infty \exp\left\{-\int_0^s [r_\tau - (a+n)]d\tau\right\}(c_s + T_s/P_s + i_s M_s/P_s - w_s)ds, \tag{18}$$

を得る。

$W_0/P_0 = k_0 + B_0/P_0 + M_0/P_0 = k_0 + B_0^g/P_0$ である。したがって (18) 式は

$$\begin{aligned}k_0 + \frac{B_0^g}{P_0} &= \int_0^\infty \exp\left\{-\int_0^s [r_\tau - (a+n)]d\tau\right\}(c_s + T_s/P_s + i_s M_s/P_s - w_s)ds\\ &= \int_0^\infty \exp\left\{-\int_0^s [r_\tau - (a+n)]d\tau\right\}(c_s + g_s - w_s)ds\\ &\quad + \int_0^\infty \exp\left\{-\int_0^s [r_\tau - (a+n)]d\tau\right\}(T_s/P_s + i_s M_s/P_s - g_s)ds,\end{aligned} \tag{19}$$

と書き直すことができる。FTPL の基本式 (17) が成立しているのであれば、(19) 式は

$$k_0 = \int_0^\infty \exp\left\{-\int_0^s [r_\tau - (a+n)]d\tau\right\}(c_s + g_s - w_s)ds, \tag{20}$$

となる[*5]。これは現在の資本ストックと現在から将来にわたる賃金の割引現在価値の合計を足したものが、現在から将来にわたる消費支出と政府支出の割引現在価値の合計に等しいことを意味する。あるいは、消費支出と政府支出の合計が賃金を上回る部分の割引現在価値の合計として、現在の資本が使い尽されることを意味する。

同様に FTPL の基本式 (17) を解釈してみよう。家計にとっては保有する国債は資産である。その実質残高は、実質の課税 + シニョレッジの支払いの合計が政府支出を上回る部分の割引現在価値の合計として使い尽される。

FTPL の基本式 (17) と (20) 式とでは違いもある。(20) 式において、現在の資本ストック k_0 は所与であり、それに基いて右辺の変数の経路が決定される。仮に何らかのショックによって現在の資本ストックが変化すれば、それに応じて右辺の変数の経路が変化する。一方、FTPL の基本式 (17) では、家計にとって右辺の現在から将来にわたる政府の行動は所与である。保有する国債の名目残高も所与であるから、右辺が変化すれば現在の物価が変化するしかない。

6　おわりに

本稿では、資本が存在する場合に FTPL が成り立つかどうかを検討した。その結果、国債の実質価値が財政余剰の現在価値に等しくなるように現在の物価が定まるという FTPL の基本式は変わらないということが示された。導出の際に重要となるのは政府の動学的予算制約と NPG 条件である。実物経済については、実物のみで考えた新古典派成長モデルからの乖離はない。更に、家計が保有する政府に対する債権の実質残高は、実質の課税 + シニョレッジの支払いの合計が政府支出を上回る部分の割引現在価値の合計として使い尽されるという、FTPL の基本式の異なる解釈が示された。これは実物の資本ストックが消費支出と政府支出の合計が賃金を上回る部分の割引現在価値の合計として使い尽されるという (20) 式との対比によって明確になるだろう。

国債の負債がどれだけ巨額になろうと、国債が国内で消化される限り、家計はそれに見合う資産を保有することになる。財政危機は世代間というよりも世代内での分配上の問題であろう。国債に対する信任が崩壊すれば、国債の流通価格は暴落する。これは国債を主要な資産とする中央銀行の負債（貨幣）に対する信任をも崩壊させる。また国債の流通価格の暴落によって名目金利は上昇する。本稿で論じたモデルにおいて、これは実質金利の上昇ではなく物価の上昇によるものである。

一方で、本稿では貨幣の役割が曖昧である。中央銀行は貨幣と家計が保有する国債を交換する。家計が国債と利子を生まない貨幣との交換に応じるのは、貨幣が持つ便益による。貨幣保

[*5] これは (1) 式を k_t についての微分方程式として解き、NPG 条件 $\lim_{t\to\infty} k_t \exp\{-\int_0^t [r_\tau - (a+n)]d\tau\}$ を適用して得られるものと同じである。

有が増えるほど貨幣の限界便益は減少する。中央銀行がどれだけの貨幣を発行できるかについては限界があるのではないか?

また本稿では技術進歩、人口変化がある経済を想定したが、これらのパラメータが変化したとき経済にどのような影響を与えるかについて、分析が不十分である。資本ストックが想定にも問題があると思われる。これらについては今後の課題としたい。

参考文献

Blanchard, Oliver Jean and Stanley Fischer (1989) *Lectures on Macroeconomics*, Cambridge MA: MIT Press,（高田聖治訳,『マクロ経済学講義』, 多賀出版, 1999 年）.

鐺田亨 (2012) 「連続時間モデルにおける FTPL の批判的検討」, *NUCB Journal of Economics and Information Science*, 第 56 巻, 第 2 号, 151–158 頁.

渡辺努・岩村充 (2004) 『新しい物価理論』, 岩波書店.