経路空間上のベクトル場について

廣　島　　　勉

1　イントロダクション：$\mathbb{R}^n$ 上の熱方程式

$\mathbb{R}^n$ 上の熱方程式の基本解による解

$$\mathcal{H}_t f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-\frac{|x-y|^2}{2t}} \frac{dy}{\sqrt{(\pi t)^n}}$$

において、$v = \dfrac{y-x}{\sqrt{t}}$ の変数変換をする。

$$\mathcal{H}_t f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x+\sqrt{t}v) e^{-\frac{|v|^2}{2}} \frac{dv}{\sqrt{\pi^n}}$$

これを、t で微分し、

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathcal{H}_t f(x)) = \int_{\mathbb{R}^n} \sum_i \partial_i f(x+\sqrt{t}v) \frac{v_i}{2\sqrt{t}} e^{-\frac{|v|^2}{2}} \frac{dv}{\sqrt{\pi^n}}$$

$\dfrac{\partial}{\partial v_i}\left(e^{-\frac{|v|^2}{2}}\right) = -v_i e^{-\frac{|v|^2}{2}}$ を用いて、部分積分すると、

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(\mathcal{H}_t f(x)) &= -\frac{1}{2\sqrt{t}} \int_{\mathbb{R}^n} \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x+\sqrt{t}v) v_i e^{-\frac{|v|^2}{2}} \frac{dv}{\sqrt{\pi^n}} \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{t}} \int_{\mathbb{R}^n} \sum_i \frac{\partial}{\partial v_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(x+\sqrt{t}v)\right) e^{-\frac{|v|^2}{2}} \frac{dv}{\sqrt{\pi^n}} \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \sum_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x+\sqrt{t}v) e^{-\frac{|v|^2}{2}} \frac{dv}{\sqrt{\pi^n}} \\ &= -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \Delta f(x+\sqrt{t}v) e^{-\frac{|v|^2}{2}} \frac{dv}{\sqrt{\pi^n}}\end{aligned} \tag{1}$$

を得る。

同様の部分積分が経路積分で可能であるとして、(1)でのベクトル場 $\sum_i v_i \dfrac{\partial}{\partial v_i}$ にあたるものが、リーマン多様体上の経路積分で何であるのかを考察したい。

2　リーマン多様体のH^1級曲線

（M, g）を、連結で、向き付けられ、境界を持たない、n次元完備リーマン多様体とする。リーマン計量gから誘導される（M, g）の主$SO(n)$束を$O(M)$とし、$O(M)$上の標準1次微分形式をθ、リーマン多様体（M, g）のLevi-Civita接続から定まる$O(M)$上の接続形式をωとする。

主$SO(n)$束$O(M)$の曲線$\hat{\gamma}:[0, 1]\ni s\mapsto\hat{\gamma}(\mathrm{s})\in O(M)$が$H^1$級の曲線であるとは、$\hat{\gamma}$の接ベクトル$\dfrac{d\hat{\gamma}}{ds}$が$O(M)$の標準的な接枠で$L^2$級であること、すなわち、

$$\omega\left(\frac{d\hat{\gamma}}{ds}\right):[0,\ 1]\to\mathfrak{o}(n)$$

と

$$\theta\left(\frac{d\hat{\gamma}}{ds}\right):[0,\ 1]\to\mathbb{R}^n$$

が区間［0, 1］上でL^2級関数であることとする。

主$SO(n)$束$O(M)$のH^1級曲線$\hat{\gamma}:[0,\ 1]\ni s\mapsto\hat{\gamma}(\mathrm{s})\in O(M)$が水平であるとは、$L^2$級関数として、

$$\omega\left(\frac{d\hat{\gamma}}{ds}\right)=0$$

となることとする。

リーマン多様体（M, g）上の曲線$\gamma:[0, 1]\ni s\mapsto\gamma(\mathrm{s})\in M$が$H^1$級の曲線であるとは、主$SO(n)$束$O(M)$の$H^1$級の水平な曲線$\hat{\gamma}:[0, 1]\to O(M)$で、$\gamma$の持ち上げになっているものが存在すること、すなわち$O(M)$から底空間Mへの射影をπとするとき、

$$\pi(\hat{\gamma}(\mathrm{s}))=\gamma(\mathrm{s})$$

となる主$SO(n)$束$O(M)$のH^1級の水平な曲線$\hat{\gamma}$が存在することとする。

このような水平持ち上げは、存在するとすれば、起点$p_0\in\pi^{-1}(x_0)\subset O(M)\,(x_0=\gamma(0)\in M)$の選び方を除いて、一意的に定まる。

定理2.1. $\xi\in L^2([0, 1], \mathbb{R}^n)$と起点$p_0\in O(M)$が与えられたとき、

$$\begin{aligned}\omega\left(\frac{d\hat{\gamma}}{ds}\right)&=0,\\ \theta\left(\frac{d\hat{\gamma}}{ds}\right)&=\xi,\\ \hat{\gamma}(0)&=p_0\end{aligned}\tag{2}$$

となる曲線$\hat{\gamma}:[0, 1]\to O(M)$が一意的に存在する。

証明. 主$SO(n)$束$O(M)$の局所自明化を与えるような座標近傍（U, ϕ）を$\phi=(x,\ a):U\to\mathbb{R}^n\times\mathfrak{o}(n)$とする。この座標近傍内で$O(M)$の曲線$\hat{\gamma}$の接ベクトルは

$$\frac{d\hat{\gamma}}{ds}=\frac{d(x\circ\hat{\gamma})}{ds}+\frac{d(a\circ\hat{\gamma})}{ds}$$

と表される。第2の成分は$O(M)$の垂直成分であり、微分方程式(2)は、

$$\theta_i\left(\frac{d\hat{\gamma}}{ds}\right)=\sum_j \theta_i\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)\frac{d(x_j\circ\hat{\gamma})}{ds}=\xi\,,$$

$$\omega_{ij}\left(\frac{d\hat{\gamma}}{ds}\right)=\sum_k \omega_{ij}\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)\frac{d(x_k\circ\hat{\gamma})}{ds}+\frac{d(a_{ij}\circ\hat{\gamma})}{ds}=0$$

と書き下せる。行列$\left(\theta_i\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)\right)_{1\leq i,j\leq n}$は座標近傍内で正則であるので、その逆行列を$(P_{ij}(x,\ a))_{1\leq i,j\leq n}$として、微分方程式(2)を書き直すと。

$$\frac{d(x_i\circ\hat{\gamma})}{ds}=\sum_j P_{ij}(x\circ\hat{\gamma},\ a\circ\hat{\gamma})\,\xi_j\,,$$

$$\frac{d(a_{ij}\circ\hat{\gamma})}{ds}=-\sum_{k,l}\omega_{ij}\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)P_{kl}(x\circ\hat{\gamma},\ a\circ\hat{\gamma})\,\xi_l$$

となる。すなわち、微分方程式(2)を解くことは、関数$f=(x,\ a):[0,\ 1]\to\phi(U)\subset\mathbb{R}^n\times\mathfrak{o}(n)$を未知関数として、微分方程式

$$\begin{aligned}x'_i&=\sum_j P_{ij}(x,\ a)\,\xi_j\,,\\ a'_{ij}&=\sum_{k,l}\omega_{ij}\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)P_{kl}(x,\ a)\,\xi_l\end{aligned}\tag{3}$$

$(x:[0,\ 1]\to\mathbb{R}^n,\ a:[0,\ 1]\to\mathfrak{o}(n))$を解くことに他ならない。

関数ξが区間［0, 1］上L^2級であるとき、(3)の初期値問題の解$f=(x,a)$がH^1級として一意に存在すること、関数$f=(x,a)$はC^0級になることが、標準的な議論で示される。

この定理より、起点$x_0\in M$を固定するとき、接ベクトルが2乗可積分である曲線の空間が次の様に定義できる。

定義1.

$$H^1([0,1],M,x_0)=\left\{\pi\circ\hat{\gamma}\ \middle|\ \hat{\gamma}:[0,1]\to O(M),\ \pi(\hat{\gamma}(0))=x_0,\omega\left(\frac{d\hat{\gamma}}{ds}\right)=0,\theta\left(\frac{d\hat{\gamma}}{ds}\right)\in L^2([0,1],\mathbb{R}^n)\right\}$$

さらに、$H^1([0,1],M,x_0)$は連続な曲線の空間$C^0([0,1],M,x_0)$の部分空間となる。

3　H^1曲線の変分場ベクトル

主$SO(n)$束$O(M)$の水平なH^1級曲線$\hat{\gamma}:[0,1]\to O(M)$に対し、$L^2$級関数$\xi$を

$$\xi=\theta\left(\frac{d\hat{\gamma}}{ds}\right)\in L^2([0,1],\mathbb{R}^n)$$

で定義する。定理2.1によりH^1級の曲線の空間$H^1([0,1],M,x_0)$は、$L^2([0,1],\mathbb{R}^n)\ni\xi\mapsto\pi\circ\hat{\gamma}$を「座標」として持つ。$L^2([0,1],\mathbb{R}^n)$における$\xi$の変分に対する、リーマン多様体$(M,g)$の曲線$\gamma=\pi\circ\hat{\gamma}$の挙動を調べたい。

底空間(M,g)のリーマン曲率テンソル$R=R_{ijkl}$を、主$SO(n)$束$O(M)$上の$\mathbb{R}^n\oplus\mathbb{R}^n\oplus\mathbb{R}^n\oplus\mathbb{R}^n$値関数とみなし、$R_{ijkl}(s)=R_{ijkl}(\hat{\gamma}(s))$と略記する。

Yを水平な曲線$\hat{\gamma}$に沿った主$SO(n)$束$O(M)$のベクトル場とする。Levi-Civita接続において歪率は0であるので、

$$\begin{aligned} 2d\theta_i\left(\frac{d\hat{\gamma}}{ds},\, Y\right) &= \sum_j \omega_{ij}(Y)\,\theta_j\left(\frac{d\hat{\gamma}}{ds}\right) = \sum_j \omega_{ij}(Y)\,\xi_j, \\ 2d\omega_{ij}\left(\frac{d\hat{\gamma}}{ds},\, Y\right) &= \sum_{k,l} R_{ijkl}\,\theta_k\left(\frac{d\hat{\gamma}}{ds}\right)\theta_l(Y) = \sum_{k,l} R_{ijkl}\,\xi_k\,\theta_l(Y) \end{aligned} \tag{4}$$

である。

$\xi \in L^2([0,1], \mathbb{R}^n)$ と$O(M)$の曲線$\hat{\gamma}$の変分の間には次の関係が成立する。

命題3.1. ξの変分をηとするとき、$O(M)$の曲線$\hat{\gamma}$のηに対応する変分Yは、初期条件$\theta(Y)=0$, $\omega(Y)=0$の下で、微分方程式

$$\begin{aligned} \theta_i(Y)' &= \eta_i + \sum_j \omega_{ij}(Y)\,\xi_j, \\ \omega_{ij}(Y)' &= \sum_{k,l} R_{ijkl}\,\xi_k\,\theta_l(Y) \end{aligned} \tag{5}$$

の解である。

証明. 曲線の変分Yに対しては、$\left[\frac{d}{ds}, Y\right]=0$であることに注意して、

$$2d\theta\left(\frac{d\hat{\gamma}}{ds},\, Y\right) = \frac{d}{ds}\theta(Y) - Y\left(\theta\left(\frac{d\hat{\gamma}}{ds}\right)\right) = \theta(Y)' - \eta,$$

$$2d\omega\left(\frac{d\hat{\gamma}}{ds},\, Y\right) = \frac{d}{ds}\omega(Y) - Y\left(\omega\left(\frac{d\hat{\gamma}}{ds}\right)\right) = \omega(Y)'$$

なので、(4)から、命題を得る。

(5)から、$t \in [0,1]$に対し、

$$\begin{aligned} \int_0^t \eta_i(s)\,ds &= \theta_i(Y)(t) - \sum_{j,k,l}\int_0^t \xi_j(t_2)\int_0^{t_2} R_{ijkl}(t_1)\,\xi_k(t_1)\,\theta_l(Y)(t_1)\,dt_1 dt_2 \\ \eta_i(t) &= \theta_i(Y)'(t) - \sum_{j,k,l}\int_0^t \xi_j(t)\int_0^t R_{ijkl}(t_1)\,\xi_k(t_1)\int_0^{t_1}\theta_l(Y)'(t_2)\,dt_2 dt_1 \end{aligned} \tag{6}$$

となる。

定義2. 区間［0, 1］で定義された$\mathbb{R}^n$に値を持つ関数fに対し、作用素Z、Wを、

$$Zf_i(t) = \sum_{j,k,l}\int_0^t \xi_j(t_2)\int_0^{t_2} R_{ijkl}(t_1)\,\xi_k(t_1)\,f_l(t_1)\,dt_1 dt_2$$

$$Wf_i(t) = \sum_{j,k,l}\xi_j(t)\int_0^t R_{ijkl}(t_1)\,\xi_k(t_1)\int_0^{t_1} f_l(t_2)\,dt_2 dt_1$$

で定義する。

(6)を作用素Z、Wを用いて書き直すと、

$$\int_0^t \eta(s)\,ds = \theta(Y)(t) - Z(\theta(Y))(t) = (1-Z)(\theta(Y))(t) \tag{7}$$

$$\eta(t) = \theta(Y)'(t) - W(\theta(Y)')(t) = (1-W)(\theta(Y)')(t) \tag{8}$$

である。

$|\cdot|$をユークリッド空間の標準的なノルムとする。

$$\int_0^t |\xi(t_2)| \int_0^{t_2} |\xi(t_1)| dt_1 dt_2 = \frac{1}{2}\left(\int_0^t |\xi(t_1)| dt_1\right)^2$$

であるので、次の評価を得る。

命題3.2. 区間［0, 1］上のベクトル値関数f、Rと、$t \in [0, 1]$に対し、

$$F(t) = \max\{|f(s)|\,|\, s \in [0, t]\},$$
$$K(t) = \max\{|R(s)|\,|\, s \in [0, t]\}$$

とするとき、不等式

$$|Zf(t)| \leq \frac{K(t)}{2}\left(\int_0^t |\xi(t_1)| dt_1\right)^2 \cdot F(t)$$

が成立する。

作用素Zの巾Z^mについて考察しよう。

命題3.3. m$\in \mathbb{N}$とする。$t \in [0, 1]$において、不等式

$$|Z^m f(t)| \leq \frac{K(t)^m}{(2m)!}\left(\int_0^t |\xi(t_0)| dt_0\right)^{2m} \cdot F(t) \tag{9}$$

が成立する。

証明. (9)が成立しているとして、

$$\begin{aligned}
|Z^{m+1} f(t)| &\leq K(t) \int_0^t |\xi(t_2)| \int_0^{t_2} |\xi(t_1)|\,|Z^m f(t_1)| dt_1 dt_2 \\
&\leq \frac{K(t)^{m+1}}{(2\mathrm{m})!} \int_0^t |\xi(t_2)| \int_0^{t_2} |\xi(t_1)| \left(\int_0^{t_1} |\xi(t_0)| dt_0\right)^{2m} dt_1 dt_2 \cdot F(t) \\
&= \frac{K(t)^{m+1}}{(2m+1)!} \int_0^t |\xi(t_2)| \left(\int_0^{t_1} |\xi(t_0)| dt_0\right)^{2m+1} dt_2 \cdot F(t) \\
&= \frac{K(t)^{m+1}}{(2m+2)!} \left(\int_0^{t_1} |\xi(t_0)| dt_0\right)^{2m+2} \cdot F(t)
\end{aligned}$$

から、帰納法により命題3.3が示される。

系3.4. 区間［0, 1］で定義されたC^0級関数fに対し、無限級数$\sum_{m=0}^{\infty} \|Z^m f\|_{C^0}$は収束する。作用素の級数

$$\sum_{m=0}^{\infty} Z^m$$

はC^0強位相で絶対収束し、

$$(1 - Z)^{-1} = \sum_{m=0}^{\infty} Z^m = 1 + Z + Z^2 + \cdots$$

が成立する。

同様に作用素の級数

$$\sum_{m=0}^{\infty} W^m$$

はL^2強位相で絶対収束し、

$$(1-W)^{-1}=\sum_{m=0}^{\infty}W^m=1+W+W^2+\cdots$$

が成立する。

系3.4と(7)から次の命題を得る。

命題3.5. 区間［0, 1］上の$\mathbb{R}^n$値関数Hを$H(t)=\int_0^t \eta(s)ds$とするとき、

$$\theta(Y)(t)=((1-Z)^{-1}H)(t)$$

であり、

$$|\theta(Y)(t)|\le\cosh\left(\sqrt{K(t)}\int_0^t|\xi(t_0)|dt_0\right)\cdot\int_0^t|\eta(s)|ds$$

の評価が成立する。

証明. $\max\{|H(s)||s\in[0,t]\}\le\int_0^t|\eta(s)|ds$と、

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{K(t)^m}{(2m)!}\left(\int_0^t|\xi(t_0)|dt_0\right)^{2m}=\cosh\left(\sqrt{K(t)}\int_0^t|\xi(t_0)|dt_0\right)$$

から命題3.5は従う。

4 経路空間H^1におけるベクトル場

$\xi\in L^2([0,1],\mathbb{R}^n)$から、定義1から定まる$M$の曲線を$\gamma=\pi\circ\hat{\gamma}:[0,1]\to M$とし、$M$上の関数$f$に対する経路積分

$$\int f(\gamma(1))e^{-F(\xi)}D\xi$$

を考える。定理2.1によって定まる曲線$\hat{\gamma}:[0,1]\to O(M)$の変分$Y$について、経路積分の変分は、

$$\int df(\pi Y)e^{-F(\xi)}D\xi=\sum_i\int\nabla_i f\theta_i(Y)e^{-F(\xi)}D\xi$$

となると考えられる。被積分関数において、$df(\pi Y)$はγの終点$\gamma(1)$における値であり、$\nabla_i f\theta_i(Y)$は$\hat{\gamma}$の終点$\hat{\gamma}(1)$における値である。

ヒルベルト空間$L^2([0,1],\mathbb{R}^n)$の完全正規直交系$\{\phi_\alpha\}$を固定し、

$$\xi=\sum_\alpha\int\xi_\alpha\phi_\alpha\in L^2([0,1],\mathbb{R}^n)$$

ついて、定理（2.1）によって定まる曲線$\hat{\gamma}$のパラメータξ_αに対する変分を$\frac{\partial}{\partial\xi_\alpha}$で表す。(8)から、

$$\theta\left(\frac{\partial}{\partial\xi_\alpha}\right)'=(1-W)^{-1}\phi_\alpha$$

となる。

$\xi\in L^2([0,1],\mathbb{R}^n)$の関数$F(\xi)$の勾配ベクトル場$\left\{\frac{\partial F}{\partial\xi_\alpha}\right\}$から構成される$\hat{\gamma}$の変分

$$Y=\sum_{\alpha}\frac{\partial F}{\partial \xi_\alpha}Y_\alpha$$

について、部分積分、

$$\sum_{\alpha,i}\int \nabla_i f\theta_i(Y_\alpha)\frac{\partial F}{\partial \xi_\alpha}e^{-F(\xi)}D\,\xi=\sum_{\alpha,i}\int\frac{\partial F}{\partial \xi_\alpha}(\nabla_i f\theta_i(Y_\alpha))\,e^{-F(\xi)}D\,\xi \tag{10}$$

が可能であるとして、(M, g) の Laplace-Beltrami 作用素Δとの関連を考える。

$$\sum_{\alpha,i}\frac{\partial}{\partial \xi_\alpha}(\nabla_i f\theta_i(Y_\alpha))=\sum_{\alpha,i,j}\nabla_i^2 f\theta_i(Y_\alpha)\ \theta_j\Big(\frac{\partial}{\partial \xi_\alpha}\Big)+\sum_{\alpha,i}\nabla_i f\frac{\partial}{\partial \xi_\alpha}(\theta_i(Y_\alpha))+\sum_{\alpha,i,j}\nabla_i f\omega_{ij}\Big(\frac{\partial}{\partial \xi_\alpha}\Big)\theta_j(Y_\alpha) \tag{11}$$

$(,)$ はユークリッド空間$\mathbb{R}^n$の標準的な内積であり、$\{e_i\}$はその内積に関する正規直交基底とする。$\xi_j=(e_j,\ \xi)$ から、$\dfrac{\partial \xi_j}{\partial \xi_\alpha}=(e_j,\ \phi_\alpha)$ とする。

(11)の最初の和に関し、

$$\theta_j\Big(\frac{\partial}{\partial \xi_\alpha}\Big)=\int_0^1(e_j,\ (1-W)^{-1}\phi_\alpha)\,dt=\langle e_j,\ (1-W)^{-1}\phi_\alpha\rangle$$

から、

$$\theta_i(Y_\alpha)=\langle e_i,\ (1-W^*)\,\phi_\alpha\rangle=\langle(1-W)e_i,\ \phi_\alpha\rangle \tag{12}$$

となるように、$\hat{\gamma}$の変分の族$\{Y_\alpha\}$を選ぶ。このとき、(11)の最初の和は、

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha,i,j}\nabla_{ij}^2 f\theta_i\Big(\frac{\partial}{\partial \xi_\alpha}\Big)\theta_i(Y_\alpha)&=\sum_{\alpha,i,j}\nabla_{ij}^2 f\langle(1-W)e_i,\ \phi_\alpha\rangle\langle e_j,\ (1-W)^{-1}\phi_\alpha\rangle\\&=\sum_{i,j}\nabla_{ij}^2 f\langle(1-W)e_i,\ \phi_\alpha\rangle\langle e_j,\ (1-W)^{-1}(1-W)e_i\rangle\\&=\sum_{i,j}\nabla_{ij}^2 f\langle e_j,\ e_i\rangle\\&=-\Delta f\end{aligned}$$

を得る。

(12)の$\{Y_\alpha\}$に対し、(11)の最後の和は、

$$\omega_{ij}\Big(\frac{\partial}{\partial \xi_\alpha}\Big)'=\sum_{k,l}\xi_k R_{klij}\,\theta_l\Big(\frac{\partial}{\partial \xi_\alpha}\Big)$$

から、

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha,i,j}\nabla_i f\omega_{ij}\Big(\frac{\partial}{\partial \xi_\alpha}\Big)\theta_j(Y_\alpha)&=\sum_{\alpha,i,j,k,l}\nabla_i f\int_0^1\xi_k R_{klij}\int_0^t(e_l,\ (1-W)^{-1}\phi_\alpha)\,dt_1dt\cdot\langle(1-W)e_j,\ \phi_\alpha\rangle\\&=\sum_{i,j,k,l}\nabla_i f\int_0^1\xi_k R_{klij}\int_0^t(e_l,\ e_j)\,dt_1dt\\&=\sum_{i,j}\nabla_i f\int_0^1 t\xi_j\ \mathrm{Ric}_{ij}\,dt\end{aligned}$$

である。

(11)の第2の和の$\sum_\alpha\dfrac{\partial}{\partial \xi_\alpha}(\theta(Y_\alpha))$について、リーマンテンソルの反対称性と、

$$\langle We_i,\ \phi_\alpha\rangle=\int_0^1(We_i,\ \phi_\alpha)\,dt=-\sum_{j,k,l}\int_0^1\frac{\partial \xi_l}{\partial \xi_\alpha}\xi_k\int_0^t t_1\,\xi_j\ R_{ijkl}\,dt_1dt$$

および、

$$\sum_{k,l}\frac{\partial\xi_l}{\partial\xi_\alpha}\frac{\partial\xi_k}{\partial\xi_\alpha}R_{jikl}=0$$

から、

$$\frac{\partial}{\partial\xi_\alpha}(\theta_i(Y_\alpha))=\sum_{j,k,l}\int_0^1\frac{\partial\xi_l}{\partial\xi_\alpha}\xi_k\int_0^t t_1\frac{\partial\xi_j}{\partial\xi_\alpha}R_{ijkl}\,dt_1dt+\sum_{j,k,l}\int_0^1\frac{\partial\xi_l}{\partial\xi_\alpha}\xi_k\int_0^t t_1\,\xi_j\frac{\partial R_{ijkl}}{\partial\xi_\alpha}\,dt_1dt \tag{13}$$

である。

リーマンテンソルRに対し$\frac{\partial R_{ijkl}}{\partial\xi_\alpha}$は、

$$\begin{aligned}\frac{\partial R_{ijkl}}{\partial\xi_\alpha}=\sum_m\theta_m\left(\frac{\partial}{\partial\xi_\alpha}\right)\nabla_m R_{ijkl}&+\sum_m\omega_{mi}\left(\frac{\partial}{\partial\xi_\alpha}\right)R_{mjkl}\\&+\sum_m\omega_{mj}\left(\frac{\partial}{\partial\xi_\alpha}\right)R_{imkl}\\&+\sum_m\omega_{mk}\left(\frac{\partial}{\partial\xi_\alpha}\right)R_{ijml}\\&+\sum_m\omega_{ml}\left(\frac{\partial}{\partial\xi_\alpha}\right)R_{ijkm}\end{aligned}$$

であり、Levi-Civita接続においては、歪率は0であるので、

$$\sum_j\xi_j\,\omega_{mj}\left(\frac{\partial}{\partial\xi_\alpha}\right)=\theta_m\left(\frac{\partial}{\partial\xi_\alpha}\right)'-\frac{\partial\xi_m}{\partial\xi_\alpha}$$

および、

$$\sum_{j,m}\xi_j\,\omega_{mj}\left(\frac{\partial}{\partial\xi_\alpha}\right)R_{imkl}=\sum_m\theta_m\left(\frac{\partial}{\partial\xi_\alpha}\right)'R_{imkl}-\sum_j\frac{\partial\xi_j}{\partial\xi_\alpha}R_{ijkl}$$

を⒀に適用して、

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\xi_\alpha}(\theta_i(Y_\alpha))=\sum_{j,k,l,m}&\int_0^1\frac{\partial\xi_l}{\partial\xi_\alpha}\xi_k\int_0^t t_1\,\xi_j\,\theta_m\left(\frac{\partial}{\partial\xi_\alpha}\right)\nabla_m R_{ijkl}\,dt_1dt\\&+\sum_{k,l,m}\int_0^1\frac{\partial\xi_l}{\partial\xi_\alpha}\xi_k\int_0^t t_1\,\theta_m\left(\frac{\partial}{\partial\xi_\alpha}\right)'R_{imkl}\,dt_1dt\\&+\sum_{j,k,l,m}\int_0^1\frac{\partial\xi_l}{\partial\xi_\alpha}\xi_k\int_0^t t_1\,\xi_j\,\omega_{mi}\left(\frac{\partial}{\partial\xi_\alpha}\right)R_{mjkl}\,dt_1dt\\&+\sum_{j,k,l,m}\int_0^1\frac{\partial\xi_l}{\partial\xi_\alpha}\xi_k\int_0^t t_1\,\xi_j\,\omega_{mk}\left(\frac{\partial}{\partial\xi_\alpha}\right)R_{ijml}\,dt_1dt\\&+\sum_{j,k,l,m}\int_0^1\frac{\partial\xi_l}{\partial\xi_\alpha}\xi_k\int_0^t t_1\,\xi_j\,\omega_{ml}\left(\frac{\partial}{\partial\xi_\alpha}\right)R_{ijkm}\,dt_1dt\end{aligned}$$

を得る。

参考文献

［1］藤原　大輔、ファインマン経路積分の数学的方法、シュプリンガー・フェアラーク東京、(1999)

［2］T. Hiroshima, *A Thought about Feynman Path Integral on Riemannian Manifold*, NUCB Journal of Economics and Information Science Vol. **55** No. **2**, (2011) 219–225.

[3] T. Hiroshima, *Path Space and Laplace-Beltrami Operator on Riemannian Manifold*, NUCB Journal of Economics and Information Science Vol. **56** No. **2**, (2012) 131−138.